Algebra II. Primer curso de Ingeniería Informática.

29 de Marzo de 2007

Apellidos ____________________ Nombre ____________ DNI ____________ Grupo __

Debes justificar todas tus respuestas. Todos los apartados se puntuarán sobre 1 punto, y en todos ellos se usa como cuerpo de coeficientes $\mathbb{Q}$.

Cuestiones

1. Discutir razonadamente si para una matriz A, con m filas y n columnas, se satisface siempre que

$$dim\ Col(A) + dim\ Nul(A) = m.$$

La nulidad de A, $Nul(A)$, es lo mismo que el núcleo de la aplicación lineal definida por la matriz A.
No es verdad si $m \neq n$, ya que lo que siempre es cierto es

$$dim\ Col(A) + dim\ Nul(A) = n.$$

2. Discutir razonadamente si siempre que $AB = AC$ entonces $B = C$, con A, B y C matrices cuadradas cualesquiera.
No es cierto por que A puede ser, por ejemplo, la matriz nula que haría que AB y AC fueran matrices nulas y, por tanto iguales, pero podemos elegir $B \neq C$.
3. Discutir razonadamente si es cierto o no que

$$rg(A + B) = \text{Máx}\{rg(A), rg(B)\}.$$

Es falso como podemos ver tomando $A = \mathbf{I_{n\times n}}$ y por tanto de rango máximo y B una matriz igual a la identidad $\mathbf{I_{n\times n}}$ pero con $b_{11} = -1$. La suma es de rango $n-1$ pero el máximo es n.
4. Sean v_1 y v_2 vectores linealmente independientes en un espacio vectorial E, y tales que el conjunto $\{v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 - 3v_2\}$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $V \subset E$. Es decir,

$$V := < v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 - 3v_2 > \subset E.$$

Obtener una base de V.
Sea V_1 el subespacio generado por v_1 y v_2, que es de dimensión 2 por ser independientes los generadores. Los tres vectores que generan V están en V_1 luego $V \subset V_1$. La única manera en que puede ser $V \neq V_1$ es si V es una recta, pero v_1 y v_2 son independientes. Probamos que $v_1 + v_2$ y $v_1 - v_2$ son linealmente independientes:

$$\lambda(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - v_2) = (\lambda + \beta)v_1 + (\lambda - \beta)v_2 = 0,$$

implica, por ser v_1 y v_2 independientes, que $\lambda + \beta = 0 = \lambda - \beta$ que tiene como única solución $\lambda = 0 = \beta$.
Una base de V es la formada por v_1 y v_2.
5. Demostrar que el subconjunto

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ b & a+b \end{pmatrix} \right\}$$

del espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2, es un subespacio vectorial. ¿Cuál es su dimensión y por qué?
Representamos las matrices como vectores de $\mathbb{Q}^4$ de la forma $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. El conjunto F de matrices es la imagen de la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{Q}^4 \\ (a,b) & \mapsto & (a-b, 2a, b, a+b) \end{array}$$

que tiene matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto F es un subespacio, porque es la imagen de una aplicación que es lineal por ser la aplicación asociada a una matriz. La dimensión de F es dos porque es el rango de la matriz, ya que las dos columnas son claramente independientes.

Ejercicio

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

consideramos la aplicación del espacio de matrices cuadradas de orden 2, $\mathcal{M}_{2\times 2}$, en sí mismo dada por $f_B(A) := BA - AB$, para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

Por ejemplo,

$$f_B(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que f_B es una aplicación lineal.
2. Obtener la matriz de f_B respecto de la base estandard (canónica) de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
3. Obtener bases de los subespacios núcleo e imagen de f_B.
4. ¿Es posible que cambiando la matriz B por otra, B', se pueda conseguir que la aplicación lineal $f_{B'}$, definida como f_B pero cambiando B por B', sea inyectiva? ¿Y suprayectiva? Justificar las respuestas.
5. ¿Es posible que para alguna matriz $B' \neq \mathbf{I_{2\times 2}}, \mathbf{0_{2\times 2}}$ sea $f_{B'}$, definida como f_B pero cambiando B por B', igual a la aplicación nula? Justificar la respuesta.

Solución:

1. Podemos demostrar que f_B es lineal comprobando que
   - $f_B(A + A') = f_B(A) + f_B(A')$.
   - $f_B(\lambda A) = \lambda f_B(A)$.

   Ambas propiedades se comprueban fácilmente aplicando las propiedades del producto de matrices, en particular, la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. Sin embargo es también consecuencia del apartado 2, ya que, en general, la aplicación inducida por una matriz es, por las mismas propiedades del producto de matrices, lineal.
2. Calculamos la matriz:
   Para eso debemos tomar una matriz A cualquiera, es decir

   $$A := \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

   y calcular $f_B(A) = BA - AB$, que resulta ser

   $$f_B(A) = \begin{pmatrix} z - y & -x + t \\ x - t & -z + y \end{pmatrix}.$$

   Ahora vemos las matrices como vectores de $\mathbb{Q}^4$ de la forma $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, de manera que A es el vector (x, y, z, t) y su imagen por f_B es el vector $f_B(A) = (z - y, -x + t, x - t, -z - y)$. ? Cuál es la matriz T, 4×4, que hace lo mismo que f_B?
   Se trata de una matriz que multiplicada por el vector que corresponde a A nos da el vector que corresponde a $f_B(A)$, es decir

$$T=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz buscada.

3. La matriz T tiene reducción gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos dice que una base de la imagen de f_B está dada por las columnas de T que correponden a los pivotes de la reducción es decir

$$Im(f_B) = Col(T) =< (0,-1,1,0), (-1,0,0,1) > .$$

El núcleo de f_B es el núcleo de T y se calcula resolviendo el sistema con matriz T. Como ya hemos calculado la reducción de Gauss-Jordan de T no hacen falta nuevos cálculos. El núcleo es de dimensión dos y está generado por los vectores

$$(0,1,1,0)\,,\ \ (1,0,0,1)\,,$$

obtenidos dando valores adecuados a las variables libres.

4. No es posible porque el vector que corresponde a la matriz identidad $(1,0,0,1)$ está siempre en el núcleo de las aplicaciones $f_{B'}$ sea cual sea B'. Esto se debe a que la identidad conmuta con cualquier matriz. Como es imposible hacer que $f_{B'}$ sea inyectiva, también lo es conseguir que sea suprayectiva.
5. Tales matrices existen y son las homotecias de matriz

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

que conmutan con todas las matrices A y producen una $f_{B'}$ nula.