Universidad Autónoma de Madrid **Álgebra II, Ingeniería Informática**
Examen del 28 de marzo de 2006.

Apellidos: Nombre:

---

1. Contesta a las cinco cuestiones siguientes. Justifica tus respuestas (haz un argumento, di qué resultado utilizas, pon un contraejemplo si hace falta, etc.). Una respuesta sin justificación puntuará cero.

(a) **(1 punto)** Tenemos un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^{100}$ con $\dim V = 74$.

¿Cuál es el número mínimo de ecuaciones del tipo $a_1 x_1 + \cdots a_{100} x_{100} = 0$ que necesitas para definir V?

Justificación: Son 26 gracias al teorema de Frobenius **"Dimensión del subespacio más dimensión de su anulador igual a dimensión del espacio ambiente"**.

(b) **(1 punto)** Sean $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^5$ subespacios vectoriales con $\dim W_1 = 3$ y $\dim W_2 = 4$.

¿Cuál es la dimensión mínima que $W_1 \cap W_2$ puede tener?

¿Cuál es la dimensión máxima que $W_1 \cap W_2$ puede tener?

Justificación: Usamos la fórmula de Grassmann. La dimensión máxima que puede tener la suma es 5 y la dimensión mínima es 4. El primer caso ocurre cuando W_1 no está contenido en W_2 y el segundo cuando está contenido.

La intersección tiene entonces una dimensión mínima de $2 = 3 + 4 - 5$, cuando la suma tiene dimensión 5, y una dimensión máxima de $3 = 3 + 4 - 4$, cuando la suma tiene dimensión 4.

(c) **(1 punto)** Sea U un espacio vectorial y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in U$ tres vectores linealmente independientes.

¿Son los vectores $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ y $-\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ distintos dos a dos? ¿Son linealmente independientes?

Justificación: Los vectores son linealmente independientes, y por tanto, distintos dos a dos. Planteamos el sistema

$$\lambda_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + \lambda_2(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + \lambda_3(-\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$$

que, como los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ son linealmente independientes, produce un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones, con matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La reducción gaussiana de esta matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, la única solución del sistema es $(0, 0, 0)$.

(d) **(1 punto)** Sean V, W espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal suprayectiva. Sea $\{ \mathbf{e}_1 , \ldots , \mathbf{e}_n \}$ una base de V.

¿Es $\{ f(\mathbf{e}_1) , \ldots , f(\mathbf{e}_n) \}$ una base de W?

Justificación: No tiene porqé serlo. Por ejemplo, puede ocurrir que V sea un plano y W una recta, de forma que la imagen de los dos vectores de una base de V sea el mismo vector de W.

(e) **(1 punto)** Sean $S_1 = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 1 = 0 \ \}$ y $S_2 = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \}$. Marca una casilla:

☐ S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

☐ Ni S_1 ni S_2 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

☐ S_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ pero S_2 no lo es.

Justificación: La respuesta correcta es la segunda. El conjunto S_1 no es subespacio porque la ecuación no es homogénea y S_2 no lo es porque la ecuación no es lineal.

2. (5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Halla una base del espacio columna $\mathrm{Col}(A)$, es decir el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por las columnas de A.

(b) Halla un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio $\mathrm{Col}(A)$.

(c) Halla una base del espacio de soluciones del sistema homogéneo $A \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Solución:

(a) Debemos reducir la matriz A, lo que nos da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que las tres primeras columnas forman una base del subespacio generado por todas las columnas.

(b) Ahora el sistema a considerar tiene como filas los vectores columna de A. La matriz del sistema es la transpuesta de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

y su reducción es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base del subespacio solución está dada por el único vector $(-4, 2, 1, 0)$, de forma que el subespacio generado por las columnas, que sabemos que tiene dimensión 3 con una base dada por las tres primeras columnas, también está dado por la única ecuación

$$-4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

(c) No hay que volver a reducir la matriz A. Basta terminar de calcular una parametrización de la solución, sustituyendo de abajo hacia arriba en el sistema que corresponde a la matriz reducida, y se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 \\ x_3 &= \frac{-1}{2}x_3 + \frac{-7}{2}x_4 \end{aligned}$$

de donde, dando valores adecuados a los dos parámetros, llegamos a la base

$$\{(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0), (\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{7}{2},\ 0,\ 1)\}.$$