Inicial   Algebra II. Primer curso de Ingeniería Informática.

4 de Junio de 2007

Primer Apellido

Apellidos ______ Nombre ______ DNI ______ Grupo ______

Debes justificar todas tus respuestas.

1. Cuestiones

a) Sea $\mathbf{A_3}$ una matriz 3×3 con columnas C_1, C_2 y C_3 que supondremos linealmente dependientes.
¿Por qué las columnas de la matriz que se obtiene al efectuar una operación elemental por filas sobre $\mathbf{A_3}$ verifican la misma relación de dependencia lineal que las columnas de $\mathbf{A_3}$?
Efectuar una operación elemental por filas es equivalente a multiplicar $\mathbf{A_3}$ por una matriz elemental por la izquierda, es decir, la matriz elemental va a la izquierda, y las columnas de la matriz producto son los productos de la matriz elemental por las columnas de $\mathbf{A_3}$. Entonces, si

$$\lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 + \lambda_3 \cdot C_3 = \mathbf{0},$$

también será

$$\mathbf{0} = \mathbf{E}(\lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 + \lambda_3 \cdot C_3) = \lambda_1 \cdot \mathbf{E}(C_1) + \lambda_2 \cdot \mathbf{E}(C_2) + \lambda_3 \cdot \mathbf{E}(C_3)$$

b) Sea $\mathbf{A_n}$ una matriz $n \times n$ con autovalores $1, 2, 3, \ldots, n$. ¿Qué puedes afirmar sobre el determinante de $\mathbf{A_n} + \mathbf{I_n}$?
Que necesariamente es distinto de cero, ya que el polinomio característico tiene grado n y n raíces ninguna de las cuales es -1. Además podemos afirmar que el valor del determinante es $(n+1)!$, ya que la matriz $\mathbf{A_n}$ es diagonalizable, por tener n autovalores distintos , y si $\mathbf{D_n}$ es su diagonalizada con matriz de cambio $\mathbf{P_n}$, se verifica

$$det(\mathbf{A_n} + \mathbf{I_n}) = det(\mathbf{P_n^{-1}} \cdot (\mathbf{A_n} + \mathbf{I_n}) \cdot \mathbf{P_n}) = det(\mathbf{D_n} + \mathbf{I_n}) = (n+1)!.$$

c) Consideramos el subespacio vectorial de $W = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y el vector $v = (1, 1, 1)$. Discutir razonadamente si la proyección ortogonal de v sobre W puede ser el vector $v' := (1, -1, 0)$.
Debe ser $v - v'$ perpendicular al plano W. ¿Lo es?

$$v - v' = (0, 2, 1),$$

y los vectores perpendiculares al plano W son los múltiplos de $w := (1, 1, 0)$, que es el vector de coeficientes de la ecuación del plano.
Es claro que $v - v'$ es independiente de w, y la conclusión es que v' no puede ser la proyección ortogonal de v.

d) Sea $\mathbf{A_n}$ una matriz $n \times n$ con entradas reales y tal que $(\mathbf{A_n})^2 = \mathbf{I_n}$. Discutir razonadamente si la matriz $\mathbf{A_n}$ puede ser ortogonal y, en caso afirmativo, dar un ejemplo para $n = 2$ y otro para $n = 3$.
La condición $(\mathbf{A_n})^2 = \mathbf{I_n}$ quiere decir que $\mathbf{A_n}$ es su propia inversa (matrices autoinversas), mientras que las matrices ortogonales son las que su inversa es su transpuesta. Entonces la matriz $\mathbf{A_n}$ tiene que ser igual a su transpuesta, es simétrica y, por el teorema espectral, diagonalizable. Sea $\mathbf{D_n}$ su diagonalización.
Entonces,

$$\mathbf{A_n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_n} \cdot \mathbf{P^{-1}},$$

y

$$\mathbf{I_n} = \mathbf{A_n}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_n} \cdot \mathbf{P^{-1}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_n} \cdot \mathbf{P^{-1}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_n}^2 \cdot \mathbf{P^{-1}},$$

y, pasando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P^{-1}}$ al otro lado, llegamos a

$$\mathbf{I_n} = \mathbf{D_n}^2.$$

Pero una matriz diagonal con cuadrado identidad tiene autovalores ± 1. En conclusión, existen matrices ortogonales y autoinversas, y son las que se obtienen mediante cambio de base ortogonal a partir de las matrices diagonales con autovalores ± 1.
Sirve como ejemplo cualquier matriz diagonal con autovalores ± 1, y, en particular, la matriz identidad sería un ejemplo trivial.

e) Argumentar la verdad o falsedad de las afirmaciones:

1) Para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, $det(\mathbf{A}) = 1$ implica $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
No, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante 1 *y no es la matriz identidad.*

2) Para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, $det(\mathbf{A}) = 1$ es equivalente a que la aplicación lineal asociada a $\mathbf{A}$ sea inyectiva.
Si una matriz cuadrada tiene determinante 1*, la aplicación lineal asociada es biyectiva (inyectiva+suprayectiva), pero no es equivalente. Hay matrices que tienen determinante no nulo pero distinto de* 1 *y su aplicación lineal asociada es también inyectiva, y, de hecho, biyectiva.*

3) Para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, $det(\mathbf{A}) = 1$ implica que la aplicación lineal asociada a $\mathbf{A}$ es suprayectiva.
Esto es cierto, ya que $det(\mathbf{A}) \neq 0$ *implica que la aplicación lineal asociada a* $\mathbf{A}$ *es biyectiva, y, en particular suprayectiva.*

2. Considérese la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 6 \\ -6 & -9 & -7 & -7 \\ -1 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar una base de $Nuc(M)$ (núcleo de M) . ¿Cuál es el rango de M?
b) Encontrar ecuaciones para la imagen ($Im(M) = Col(M)$) de la aplicación lineal dada por M.
c) Calcular la intersección de los subespacios $Nuc(M)$ e $Im(M)$ dentro de $\mathbb{Q}^4$.
d) ¿Qué puedes decir de la suma del núcleo y la imagen de M?

a) *Una reducción de* M *es la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en la que vemos que el rango de M *es dos, ya que hay dos pivotes, y que la solución es*

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2/3)x_3 \quad -(2/3)x_4 \\ x_2 &= -(1/3)x_3 \quad -(1/3)x_4. \end{aligned}$$

Obtenemos una base del núcleo dando valores adecuados a las variables libres:

$$Nuc(M) =< (-(2/3), -(1/3), 1, 0), (-(2/3), -(1/3), 0, 1) > .$$

b) *Tenemos que reducir la matriz*

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/15 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones buscadas son las del sistema con matriz M_2 *que dependen sólo de las cuatro últimas variables:*

$$x_1 + x_4 = 0, \;\; x_2 + (4/5)x_3 + (1/5)x_4 = 0.$$

c) *Formamos la matriz que tiene como primeras dos columnas la base de la imagen, y las dos últimas la base del núcleo de* M *con los vectores cambiados de signo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2/3 & 2/3 \\ 5 & 8 & 1/3 & 1/3 \\ -6 & -9 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su reducción tiene cuatro pivotes y, por tanto, la intersección es nula.

d) *Como son dos subespacios 2-dimensionales en un ambiente de dimensión cuatro, si la intersección es nula, gracias a la fórmula de Grassmann, la suma debe ser el total.*

3. Sea $V = \mathbb{R}[x]_2$ el espacio vectorial formado por los polinomios, con coeficientes reales, de grado menor o igual que dos. Considerar la transformación lineal $T : V \to V$ dada por $\mathbf{T}(p) := (x+1)p'(x)$.

a) Escribir la matriz de $\mathbf{T}$ en la base $B = \{1, x, x^2\}$.
b) ¿Cuáles son los autovalores de $\mathbf{T}$?
c) ¿Es $\mathbf{T}$ diagonalizable? En cualquier caso, encuentra un conjunto maximal de autovectores linealmente independientes.
d) ¿Existe un entero $n > 0$ tal que $\mathbf{T}^n = \mathbf{I}$?
e) ¿Existe un vector p tal que $\mathbf{T}(p) \neq p$ y $\mathbf{T}^2(p) = p$?

a) *Tenemos*

$$\mathbf{T}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + 2a_2x^2,$$

de forma que la matriz de $\mathbf{T}$ *en la base dada, que es la que se obtiene poniendo como columnas las imágenes de los vectores de la base expresados en la propia base, resulta ser*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) *Los autovalores de* $\mathbf{T}$ *son* 0, 1 *y* 2, *ya que el polinomio característico es* $-\lambda \cdot (1-\lambda) \cdot (2-\lambda)$.
c) *Como los tres autovalores son diferentes, la matriz es diagonalizable.*
Los pares (autovalor, autovector) son

$$(0, (1, 0, 0)), \ (1, (1, 1, 0)), \ (2, (1, 2, 1)).$$

d) *No puede existir tal entero porque* $\mathbf{T}$ *tiene núcleo no nulo.*
e) *La aplicación* $\mathbf{T}^2$ *es también diagonalizable con autovalores* 0, 1 *y* 4, *y los mismos autovectores. Entonces, el autovector de* $\mathbf{T}^2$ *con autovalor* 1 *es el mismo que el de* $\mathbf{T}$ *y no existe el vector* p *buscado.*

4. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica dada por

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')) = x_1x_1' - x_1x_2' - x_2x_1' + 3x_2x_2' + x_2x_3' + x_3x_2' + x_3x_3'$$

en coordenadas respecto base estándar (canónica).

a) Escribir la matriz de ϕ.
b) Demostrar que ϕ es un producto escalar.
c) Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de ϕ.
d) Para el producto escalar dado por ϕ, obtener el subespacio ortogonal al plano $x_3 = 0$.
e) Obtener la proyección ortogonal, respecto al producto escalar dado por ϕ, del vector $v = (1, 1, 1)$ sobre el plano $x_3 = 0$.

a) *Calculamos la matriz, en la base estándar, poniendo en el lugar* ij *la imagen del par* (e_i, e_j) *(*e_i *es el vector que tiene un* 1 *en el lugar* i *y el resto ceros). Queda*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) *Reducimos la forma cuadrática:*

$$\begin{aligned} \phi((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 - x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + x_2)^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

que es una suma de cuadrados y define, por tanto, un producto escalar.
c) *Los vectores* $e_1 := (1, 0, 0)$ *y* $e_3 := (0, 0, 1)$ *ya son ortogonales respecto a* ϕ. *Basta entonces encontrar un tercer vector ortogonal a estos dos y luego normalizar la base.*
Tenemos entonces las ecuaciones

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0)) = x_1 - x_2 = 0, \ \phi((x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1)) = x_2 + x_3 = 0,$$

con solución más simple el vector

$$e_2 := (1, 1, -1).$$

La base $\{e_1, e_2, e_3\}$, *que por construcción es ortogonal, es también una base ortonormal porque los tres vectores tienen longitud* 1 *respecto a* ϕ.
d) *Para calcular el ortogonal a* $x_3 = 0$ *debemos plantear el sistema*

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0)) = x_1 - x_2 = 0, \ \phi((x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0)) = -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0,$$

que tiene como solución los múltiplos del vector $f := (1, 1, -2)$.

e) *por último debemos calcular las coordenadas del vector* $v := (1,1,1)$ *en la base* $\{e_1, e_2, f\}$ *es decir, debemos resolver el sistema*

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f$$

con matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

y solución única

$$(3/2, 3/2, -1/2),$$

de forma que la proyección buscada es el vector

$$(3/2, 3/2, 0).$$