Inicial Algebra II. Primer curso de Ingeniería Informática.

Primer Apellido

2 de Junio de 2006

Apellidos ____________________ Nombre ____________ DNI __________ Grupo ____

1a. Sea M una matriz real cuadrada de orden 2. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(i) Si $\det(M) = 0$ entonces M no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

No es cierto, ya que $\det(M) = 0$ *únicamente implica que que* M *no es invertible. Un contraejemplo a la afirmación del enunciado puede ser*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

que tiene determinante 0 *y es diagonal, y por tanto diagonalizable.*

(ii) Si $\det(M) \neq 0$ entonces M es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

No es cierto, porque existen matrices no diagonalizables con determinante distinto de 0*. Por ejemplo,*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

que no es diagonalizable, ni sobre $\mathbb{R}$ *ni sobre* $\mathbb{C}$*, y tiene determinante* 1*.*

(iii) Si $\text{rango}\,(M) = 1$ entonces 0 es un autovalor de M.

Esto es cierto, ya que rango $(M) = 1$ *implica, por el teorema del rango, que* $dim(Nul(M)) = 1$*, y, por tanto, la existencia de un vector no nulo* $\mathbf{0} \neq e \in Nul(M)$*. Ese vector* e *es un autovector de autovalor* 0*.*

(iv) Si la traza de M es 0 y $\det(M) < 0$ entonces M es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

El polinomio característico de M *será*

$$p_M(\lambda) = \lambda^2 - (tr(M))\lambda + det(M) = \lambda^2 + det(M)$$

que tiene como raíces $\pm\sqrt{det(M)}$*. Como estamos suponiendo que* $det(M) < 0$*, es, en particular,* $det(M) \neq 0$ *y los dos valores propios son distintos. En consecuencia,* M *es diagonalizable y la afirmación es correcta.*

1b. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal $f(\mathbf{x}) \equiv E\,\mathbf{x}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(1) Si $\text{rango}\,(E) = 2$ entonces la imagen de f es todo $\mathbb{R}^2$.

Es cierto, ya que el rango coincide con la dimensión del subespacio imagen, que será por tanto 2*, y un subespacio de dimensión* 2 *de* $\mathbb{R}^2$ *debe coincidir con todo* $\mathbb{R}^2$ *.*

(2) Si $\text{rango}\,(E) = 2$ entonces f es inyectiva.

Es falso, porque una aplicación lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tiene siempre, por el teorema del rango, un núcleo de dimensión al menos* 1*. En este caso sabemos que la dimensión del núcleo es exactamente* 1*, y* f *no es inyectiva.*

(3) El núcleo de f no es trivial (contiene algún vector no nulo).

Es cierto, por el teorema del rango, ya que el núcleo tendrá dimensión al menos 1*.*

(4) Las columnas de E generan el núcleo de f.

Esto es, en este caso, falso. Las columnas de E *generan un subespacio de* $\mathbb{R}^2$ *mientras que el núcleo de* f *es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$*. Es imposible que coincidan los subespacios porque están en distinto espacio.*

En general, las columnas de E *generan la imagen de* f*, y, si la matriz* E *es cuadrada* $n \times n$*, puede ocurrir que el subespacio columna coincida con el núcleo: ocurre si y solo si* $f^2 = \mathbf{0}$*,* $n = 2k$ *y, por tanto, par y* $rango(E) = k$*.*

Sin embargo, la afirmación es, en general, falsa ya que siempre hay aplicaciones lineales que incumplen alguna de las condiciones anteriores.

2. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $g(\mathbf{x}) \equiv A\,\mathbf{x}$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(2.1) Probar que 1 es un autovalor de g y hallar una base del subespacio propio asociado.
Para ver que 1 es un autovalor de A, basta comprobar que el determinante de

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

es nulo.

Calculamos una base del subespacio propio, resolviendo el sistema homogéneo con matriz $A - I$, es decir, calculando la reducida de esta matriz, que resulta ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, una base del subespacio propio sería

$$\{(1,1,0), (-2,0,1)\}.$$

(2.2) Estudiar si g es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de g sea diagonal y encontrar la matriz diagonal de g correspondiente a dicha base.

Podemos afirmar que g es diagonalizable ya que es simétrica en la base estandar (canónica), que es una base ortonormal para el producto escalar estandar. Entonces, g es autoadjunta y, por el teorema espectral, diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Calculamos el resto de los autovalores y autovectores. El polinomio característico es $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7$ que factoriza en la forma $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 7)$. El autovalor 7 tiene como autovector el $(1/2, -1/2, 1)$.

Como la multiplicidad algebraica de cada autovalor es igual a su multiplicidad geométrica, vemos, de otra manera, que g es diagonalizable.

Una base formada por vectores propios será

$$\{(1,1,0), (-2,0,1), (1/2, -1/2, 1)\}$$

y la matriz de g en esta base es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

3. Dada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3.1) Hallar bases de los subespacios $\mathrm{Nul}(C)$ y $\mathrm{Col}(C)$.
Reducimos la matriz C, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que las dos primeras columnas, las correspondientes a los pivotes de la matriz reducida, son una base del subespacio columna, y la dimensión del núcleo de C es 1.

Para calcular una base del núcleo obtenemos, a partir de la matriz reducida despejando las variables pivote en función de las libres, una parametrización de la solución del sistema:

$$x_1 = -2x_3,\; x_2 = -x_3$$

de donde una base del núcleo está formada por el único vector $(-2,-1,1)$.

(3.2) Hallar una base de $\left(\mathrm{Col}(C)\right)^{\perp}$.

CUIDADO, *no es lo mismo una base ortogonal de Col(C) que una base de* $\left(Col(C)\right)^{\perp}$.

Para calcular el subespacio ortogonal, $\left(Col(C)\right)^{\perp}$ *debemos resolver el sistema*

$$< C_1, (x, y, z, t) >= 0, \ < C_2, (x, y, z, t) >= 0$$

con C_1 *y* C_2 *las dos primeras columnas de* C.

La matriz, 2×4*, del sistema a resolver es*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y su reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos la parametrización del la solución

$$x_1 = \frac{-1}{2}x_4, \ x_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

y, dando valores adecuados a los parámetros, la base del ortogonal

$$\{\mathbf{e}_3 := (0,1,1,0), \mathbf{e}_4 := (-1/2,-1/2,0,1)\}.$$

Esta base NO ES ORTOGONAL, *pero no nos piden que lo sea.*

(3.3) Hallar la distancia de $(11,0,0,0)$ al subespacio $\mathrm{Col}(C)$.

Para esto, llamando $\mathbf{e}$ *al vector* $(11,0,0,0)$*, debemos calcular la proyección ortogonal,* $\mathbf{e}_1$*, de* $\mathbf{e}$ *sobre* $Col(C)$. *La distancia pedida será* $\|\mathbf{e}-\mathbf{e}_1\|$.

- *(Primer método) Calculamos, de hecho, las coordenadas de las dos proyecciones ortogonales.*
  Para eso, planteamos el sistema

$$\mathbf{e} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4$$

  que tiene como solución, única, el vector $(1,-4,-1,-4)$. *Entonces* $\mathbf{e}_1 = C_1 - 4C_2 = (9,-1,1,4)$*, y* $\mathbf{e}-\mathbf{e}_1 = (2,1,-1,-4)$. *Su longitud es*

$$\|\mathbf{e}-\mathbf{e}_1\| = \sqrt{22}.$$

- *(Matriz de Gram) Podemos calcular* $\mathbf{e}_1$ *usando la matriz de Gram de* C_1, C_2*, que resulta ser*

$$G := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

  Hay que resolver el sistema

$$G \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \end{pmatrix} \tag{4}$$

  con los términos independientes obtenidos calculando el producto escalar de $\mathbf{e}$ *con* C_1 *y* C_2.
  La solución es $(1,-4)$*, que nos da el mismo vector* $\mathbf{e}_1$.

Podemos comprobar que el resultado obtenido es correcto verificando que se cumple el teorema de Pitágoras. Debe ser

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \|\mathbf{e}-\mathbf{e}_1\|^2$$

y, en nuestro caso,

$$121 = 99 + 22.$$

4. Definimos tres subespacios de $\mathbb{R}^4$: U, V y W. El primero mediante generadores, el segundo mediante un sistema de ecuaciones, y el tercero en forma paramétrica.

$$U :=< (0,2,1,0), (0,1,-1,0), (0,1,1,0) >, \ V := \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \ W := \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}$$

(4.1) Indicar las dimensiones de U, V y W.

- *Los tres vectores están contenidos en el plano de ecuaciones $x_1 = x_4 = 0$. Entonces, los tres vectores es imposible que sean linealmente independientes. Sin embargo, los dos primeros lo son, y, por tanto, forman una base de U. En resumen $dim(U) = 2$, y U es el plano de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones $x_1 = x_4 = 0$.*
- *Si estuviéramos trabajando en el $\mathbb{R}^2$ con coordenadas x_2 y x_3, el sistema no tendría sino la solución $(0,0)$. Como estamos en $\mathbb{R}^4$, con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), la solución es el plano con ecuaciones $x_2 = x_3 = 0$, con x_1 y x_4 tomando valores arbitrarios (variables libres). Entonces, $dim(V) = 2$.*
- *Como nos dan una parametrización que depende de dos parámetros, deberíamos esperar que la dimensión de W fuera 2. Hay que comprobar que la parametrización es inyectiva. Dando valores adecuados a los parámetros, obtenemos los vectores*

$$(0,-1,0,1), \ (0,0,0,1)$$

que son linealmente independientes. Forman entonces una base de W que tiene dimensión 2. Podemos leer directamente las ecuaciones de W: son $x_1 = x_3 = 0$, ya que este plano contiene a W, y, al ser los dos planos, deben coincidir.

(4.2) Calcular bases y dimensiones de $U \cap V$, $U \cap W$ y $V \cap W$.

- *El único vector en la intersección de U y V es el vector nulo, ya que las cuatro ecuaciones reunidas nos dan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.*
- *Ahora tenemos, para $U \cap W$, las ecuaciones $x_1 = x_4 = 0$ junto con $x_1 = x_3 = 0$, de forma que una base de la solución del sistema con las cuatro ecuaciones es $(0,1,0,0)$.*
- *Por último, para $V \cap W$, tenemos $x_2 = x_3 = 0$ junto con $x_1 = x_3 = 0$, y la solución está generada por $(0,0,0,1)$.*

(4.3) ¿Es $\mathbb{R}^4$ la suma directa de algún par de entre los tres subespacios?. ¿Cuáles y porqué?

- *Los subespacios U y V están en suma directa, ya que su intersección es nula y, por la fórmula de Grassmann, su suma debe ser todo $\mathbb{R}^4$.*
- *Los otros dos pares no pueden estar en suma directa ya que los dos subespacios de cada par tienen intersección mayor que* $\mathbf{0}$.

(4.4) ¿Existen planos T (subespacios de dimensión 2) tales que

$$dim(T \cap U) = dim(T \cap V) = dim(T \cap W) = 1?$$

Justificar la respuesta.

Sí existen. La manera más fácil de verlo es considerar el plano generado por la base que hemos encontrado de $V \cap W$, $(0,0,0,1)$, y un vector de U que sea linealmente independiente de él, por ejemplo $(0,1,0,0)$. Entonces, una solución es

$$T := < (0,0,0,1), (0,1,0,0) > .$$

¿Qué podríamos hacer si las intersecciones de los tres pares de subespacios fueran nulas? Todavía habría soluciones, sean cuales sean los tres planos. Para verlo bastaría escribir un vector general en cada uno de los tres subespacios e imponer la condición de que estos tres vectores fueran linealmente dependientes, pero generando un plano.