Ejercicios del Capítulo 1

Leyenda: $\heartsuit$ fácil, $\diamondsuit$ difícil, $\diamondsuit\diamondsuit$ muy difícil, $\circ$ opcional.

Sección 1.1

1. Demostrar que:
i) $\{n + m\sqrt{3}\ :\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un anillo.
ii) $\{a + b\sqrt{3}\ :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un anillo tal que todos sus elementos no nulos son unidades.
iii) $\{a + b\sqrt[4]{3}\ :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ no es un anillo.
$\diamondsuit$iv) $\{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}\ :\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ es un anillo tal que todos sus elementos no nulos son unidades.

$\heartsuit$**2.** Sean $R_1, \dots, R_n$ anillos. Demostrar que $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ es un anillo con las operaciones de suma y producto obvias (las dadas por las de cada R_i coordenada a coordenada).

$\heartsuit$**3.** Escribir la tabla de multiplicación del anillo $\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$.

4. El conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ es un anillo conmutativo con unidad, con la suma y el producto módulo 10. ¿Cuál es la unidad multiplicativa? ¿Y los elementos invertibles?

5. Probar que los elementos neutros de las operaciones de un anillo con unidad son únicos.

6. Comprobar que las unidades de $\mathbb{Z}_{17}$ forman un grupo cíclico.

7. ¿Cuántas unidades hay en $\mathbb{Z}_{10^6}$?

8. Hallar todas las unidades en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-3})/2]$ y en el anillo de matrices enteras 2×2.

9. Probar que $2x + 1$ tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_4[x]$.

10. Hallar las unidades del anillo de matrices 2×2 con elementos en $\mathbb{Z}_4$.

11. Hallar el inverso multiplicativo de 5 en $\mathbb{Z}_{21}$ usando el algoritmo de Euclides.

12. Probar que en el anillo de matrices reales $n \times n$, para todo elemento, m, que no es una unidad, existe $m' \neq 0$ tal que $m'm = 0$.

13. Encontrar un anillo R en el que no se verifiquen ninguna de las siguientes propiedades:
i) Si $a^2 = a$, entonces $a = 1$ ó $a = 0$.
ii) Si $ab = ac$ para $a \neq 0$ entonces $b = c$.

14. Si R no es un dominio de integridad la intuición que tenemos sobre ecuaciones algebraicas puede ser completamente errónea. Meditemos sobre este hecho:
i) Buscar un anillo R en el que la ecuación $ax = b$ con $a, b \in R$ tenga más de una solución.

ii) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $\mathbb{Z}_{12}$.

♡**15.** Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que:
i) Para todo $r \in R$, y para todo entero positivo n, se tiene que $f(r^n) = f(r)^n$.
ii) La imagen de R por f, $\{s \in S : s = f(r), \text{ para algún } r \in R\}$, es un subanillo de S.

♡**16.** Sea $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\phi(P) = 2^{\partial P}$. Estudiar si es un homomorfismo.

17. Probar que el anillo $\mathbb{Z}_6$ es isomorfo al anillo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

18. Demostrar que los anillos $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} c & 7d \\ d & c \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

son isomorfos.

19. Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ dada por $f(x) = x^n$ es un homomorfismo de anillos si n es primo. ¿Es el resultado cierto si n no es primo?

∘**20.** Escribir $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ y $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en términos de los polinomios simétricos elementales.

∘**21.** Sea $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ para $0 < k$ y $s_0 = k$. Demostrar las "identidades de Newton"

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} s_k &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s_i \sigma_{k-i} \qquad \text{para } 0 < k \leq n \\ (-1)^{k+1} s_k &= \sum_{i=k-n}^{k-1} (-1)^i s_i \sigma_{k-i} \qquad \text{para } k > n \end{aligned}$$

donde σ_i son los polinomios simétricos elementales. *Indicación*: Defínase $\sigma_i = 0$ para $i > n$ y aplíquese inducción para demostrar simultáneamente ambas identidades.

Sección 1.2

♡**22.** Probar que a y b están asociados si y sólo si $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.

23. ¿Cuándo tiene sentido $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

24. Hallar el generador mónico del ideal $I = \langle x^3 + 1, x^2 + 1 \rangle$ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

♡**25.** Demostrar que $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 5x + 6 \rangle$ no es un dominio de integridad.

26. En $\mathbb{Z}[x]$ sea I el subconjunto formado por los polinomios tales que la suma de sus coeficientes es cero. Probar que I es un ideal y que $\mathbb{Z}[x]/I$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

27. Hallar un subanillo de $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ que no sea ideal.

28. Probar que todos los subanillos de $\mathbb{Z}$ son ideales. Dar un contraejemplo si $\mathbb{Z}$ se reemplaza por $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

29. Demostrar que el grupo multiplicativo de $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ es cíclico y dar un generador.

30. Hallar los ideales de $\mathbb{Z}_{24}$.

31. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que:
i) Si $J \subset S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$ es un ideal en R.
ii) El núcleo de f es un ideal.
iii) Un homomorfismo de anillos es inyectivo si y sólo si su núcleo es $\{0\}$.

32. Dado un anillo R y un ideal $I \subset R$, demostrar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de R/I y los ideales de R que contienen a I. *Indicación*: usar el homomorfismo natural $\pi : R \to R/I$, que a cada elemento $a \in R$ le asocia su clase módulo I, y observar que la imagen inversa de un ideal por un homomorfismo de anillos es también un ideal.

33. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Hallar todos los ideales del anillo $A/2A$.

34. Hallar los ideales de $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3-1\rangle$.

35. Decidir si el ideal $\langle 29, 13+\sqrt{-5}\rangle$ es principal en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

36. Probar que el anillo de matrices cuadradas reales $n \times n$ no tiene ideales no triviales.

37. Encontrar todos los ideales maximales de los anillos $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_n$.

38. Probar que $I = \{(3n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

39. Sea $I \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dado por $I = \{a + b\sqrt{-5} \ : \ a+b \text{ es par}\}$. Demostrar que es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

$\diamondsuit$**40.** Sean I y J, con $J \subset I$, ideales de un anillos A. Probar que A/I es isomorfo a $(A/J)\big/(I/J)$. (Esto requiere en particular probar que este último cociente tiene sentido).

$\diamondsuit$**41.** Sea p primo y sea $A \subset \mathbb{Q}$ el anillo formado por todas las fracciones cuya forma irreducible tiene denominador no divisible por p. Hallar un anillo sencillo que sea isomorfo a $A/\langle p\rangle$.

Sección 1.3

42. Sea el conjunto $H = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25\dots\}$. Decimos que $p \in H$ es un H-primo si $p \neq 1$ y no es divisible por ningún elemento de H salvo por sí mismo y por uno. Por ejemplo, 5 y 9 son H-primos, pero $25 = 5 \cdot 5$ no. Comprobar que 693 tiene varias posibles descomposiciones en factores H-primos. (Nota: Hilbert (1862-1943) propuso H como un conjunto sencillo en el que no se cumple el análogo del teorema fundamental de la aritmética).

43. Hallar todos los polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}_2[x]$ de grados 2, 3 y 4.

44. Decir si son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ los polinomios $3x^2 - 7x - 5$, $6x^3 - 3x - 18$ y $x^3 - 7x + 1$.

45. Demostrar que $x^3 - x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$.

46. Demostrar que $x^5 - x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$.

47. Probar la irreducibilidad en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios: $x^5 - 3x + 3$, $x^6 - 6x + 2$, $x^2 + 1$, $x^4 + 1$ y $x^6 + x^3 + 1$.

48. Probar que $P \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible si y sólo si Q dado por $Q(x) = P(x+1)$, lo es.

49. Probar que el criterio de Eisenstein es aplicable al polinomio

$$x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \binom{p}{2}x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-1}.$$

50. Decidir si los siguientes polinomios son irreducible en $\mathbb{Q}[x]$: $x^4 + 3x + 6$, $x^3 + 11^{11}x + 13^{13}$, $\frac{1}{3}x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}$, $x^5 - 9x^2 + 1$ y $x^4 - x^3 - x - 1$.

51. Probar que $x^2 + bx + c$ es irreducible en $\mathbb{Z}_7[x]$ si y sólo si $b^2 - 4c = 3, 5, 6$.

52. Estudiar la irreducibilidad de $P = x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$, $\mathbb{Z}_{11}[x]$, $\mathbb{Z}_{13}[x]$ y $\mathbb{Z}_{17}[x]$.

$\circ$**53.** Intentar inducir (sin demostración) una regla general sencilla que permita decidir la irreducibilidad de $P = x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_p[x]$ sin calcular sus raíces.

54. Hallar un contraejemplo a la Proposición 1.3.8 si se omite la condición $\partial P = \partial \overline{P}$.

55. Estudiar si $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un dominio de factorización única.

56. Demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio de factorización única y encontrar la factorización de 20. *Indicación*: La ecuación en enteros $a^2 - 2b^2 = 5$ no tiene solución (lleva a contradicción módulo 5).

57. Estudiar si $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ es un dominio de factorización única.

$\diamondsuit$**58.** Estudiar si $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ es un dominio de factorización única.

$\diamondsuit$**59.** Demostrar que un polinomio de la forma $P = x^n + px + p^2$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

$\diamondsuit$**60.** Sea $p > 2$ primo. Demostrar que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $p = n^2 + mn + m^2$ si y sólo si $P = x^2 + x + 1$ factoriza en $\mathbb{Z}_p[x]$.