Teoría de Galois **3º de Matemáticas**

CURSO 2012-2013 18 DE DICIEMBRE DE 2012

EXAMEN PARCIAL 3

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

$\square + \square + \square = \square$

1) (3 puntos) Sea $P \in \mathbb{Q}[x]$ tal que su cuerpo de descomposición L satisface $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$. Demostrar que P es soluble por radicales.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) La extensión $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012)$ es radical.
b) Toda extensión radical es normal.

3) (4 puntos) Sea $P \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado 3 y r_1, r_2, r_3 sus raíces. Probar que si $[\mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3) : \mathbb{Q}] = 3$ entonces no puede haber dos raíces complejas conjugadas y que $(r_1^{20} - r_2^{20})^{13}(r_2^{20} - r_3^{20})^{13}(r_3^{20} - r_1^{20})^{13}$ es un número racional.

---

1) Según el teorema de Galois, todo lo que hay que comprobar es que $S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$ es un grupo resoluble. Para ello consideramos la serie de composición:

$$\{\text{Id}\} \times \{\overline{0}\} \underset{(1)}{\lhd} \{\text{Id}\} \times \langle \overline{3} \rangle \underset{(2)}{\lhd} \{\text{Id}\} \times \mathbb{Z}_{33} \underset{(3)}{\lhd} A_3 \times \mathbb{Z}_{33} \underset{(4)}{\lhd} S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$$

La normalidad en (1), (2) y (3) se sigue porque los grupos son abelianos ($A_3 \cong \mathbb{Z}_3$) y en (4), porque el índice es 2. El resto de los índices son también primos, por tanto los cocientes son isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ con p primo.

2) a) [V] $\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012) = \mathbb{Q}(\pi^4)$ porque $2012 \in \mathbb{Q}$ y la cadena $\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012) = \mathbb{Q}(\pi^4) \subset \mathbb{Q}(\pi^4, \pi) = \mathbb{Q}(\pi)$ implica que $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012)$ es radical.
b) [F] $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ es radical pero no es normal, porque el polinomio irreducible $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ pero no todas.

3) Se tiene $3 = |\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}]$ con $L = \mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3)$, ya que $L/\mathbb{Q}$ es de Galois. Si hubiera dos raíces complejas conjugadas, la conjugación restringida a L sería un $\mathbb{Q}$-automorfismo no trivial (lo es en $\mathbb{C}$) con orden 2, pero $2 \nmid 3$. De la misma forma, no hay elementos de $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ que sólo intercambien dos raíces, por tanto los únicos posibles elementos no triviales son σ y σ^2 con $\sigma(r_1) = r_2$, $\sigma(r_2) = r_3$ y $\sigma(r_3) = r_1$. Ambos dejan fija la cantidad del enunciado, por tanto ésta debe pertenecer al cuerpo base $\mathbb{Q}$.