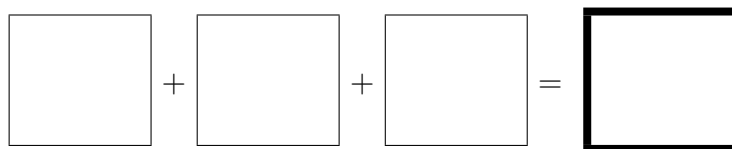


APELLIDOS Y NOMBRE \_\_\_\_\_

D.N.I. \_\_\_\_\_ FIRMA \_\_\_\_\_



**1) (3 puntos)** Sea  $P \in \mathbb{Q}[x]$  tal que su cuerpo de descomposición  $L$  satisface  $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$ . Demostrar que  $P$  es soluble por radicales.

**2) (3 puntos)** Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La extensión  $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012)$  es radical.

b) Toda extensión radical es normal.

**3) (4 puntos)** Sea  $P \in \mathbb{Q}[x]$  un polinomio de grado 3 y  $r_1, r_2, r_3$  sus raíces.

Probar que si  $[\mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3) : \mathbb{Q}] = 3$  entonces no puede haber dos raíces complejas conjugadas y que  $(r_1^{20} - r_2^{20})^{13}(r_2^{20} - r_3^{20})^{13}(r_3^{20} - r_1^{20})^{13}$  es un número racional.

**1)** Según el teorema de Galois, todo lo que hay que comprobar es que  $S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$  es un grupo resoluble. Para ello consideramos la serie de composición:

$$\{\text{Id}\} \times \{\bar{0}\} \underset{(1)}{\triangleleft} \{\text{Id}\} \times \langle \bar{3} \rangle \underset{(2)}{\triangleleft} \{\text{Id}\} \times \mathbb{Z}_{33} \underset{(3)}{\triangleleft} A_3 \times \mathbb{Z}_{33} \underset{(4)}{\triangleleft} S_3 \times \mathbb{Z}_{33}$$

La normalidad en (1), (2) y (3) se sigue porque los grupos son abelianos ( $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ ) y en (4), porque el índice es 2. El resto de los índices son también primos, por tanto los cocientes son isomorfos a  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo.

**2) a)** [V]  $\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012) = \mathbb{Q}(\pi^4)$  porque  $2012 \in \mathbb{Q}$  y la cadena  $\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012) = \mathbb{Q}(\pi^4) \subset \mathbb{Q}(\pi^4, \pi) = \mathbb{Q}(\pi)$  implica que  $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^4 + 2012)$  es radical.

**b)** [F]  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$  es radical pero no es normal, porque el polinomio irreducible  $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  tiene una raíz en  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$  pero no todas.

**3)** Se tiene  $3 = |\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}]$  con  $L = \mathbb{Q}(r_1, r_2, r_3)$ , ya que  $L/\mathbb{Q}$  es de Galois. Si hubiera dos raíces complejas conjugadas, la conjugación restringida a  $L$  sería un  $\mathbb{Q}$ -automorfismo no trivial (lo es en  $\mathbb{C}$ ) con orden 2, pero  $2 \nmid 3$ . De la misma forma, no hay elementos de  $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$  que sólo intercambien dos raíces, por tanto los únicos posibles elementos no triviales son  $\sigma$  y  $\sigma^2$  con  $\sigma(r_1) = r_2$ ,  $\sigma(r_2) = r_3$  y  $\sigma(r_3) = r_1$ . Ambos dejan fija la cantidad del enunciado, por tanto ésta debe pertenecer al cuerpo base  $\mathbb{Q}$ .