Teoría de Galois | **3^o de Matemáticas**
Curso 2012-2013 | 20 de noviembre de 2012

Examen Parcial 2

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ______________ Firma ______________________

$\square + \square + \square = \square$

1) (3 puntos) Sea $K \subset L$ con L/K extensión de Galois tal que $\mathcal{G}(L/K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Hallar cuántas extensiones normales M/K hay con $[L:M]=2$ donde $K \subset M \subset L$.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) El $\mathbb{Q}$-automorfismo σ en $\mathbb{Q}\big(e^{2\pi i/7}\big)$ dado por $\sigma\big(e^{2\pi i/7}\big) = e^{2012\pi i/7}$ tiene orden 6.
b) La extensión $\mathbb{Q}\big(e^{2\pi i/13}\big)/\mathbb{Q}\big(\cos\frac{2\pi}{13}\big)$ es normal.

3) (4 puntos) Dado el polinomio irreducible $x^4+x^3+1 \in \mathbb{F}_2[x]$, sea α una de sus raíces en su cuerpo de descomposición. Demostrar que $M = \mathbb{F}_2(\alpha+\alpha^4)$ es un subcuerpo propio intermedio de $\mathbb{F}_2(\alpha)/\mathbb{F}_2$, esto es, que $\mathbb{F}_2 \subsetneqq M \subsetneqq \mathbb{F}_2(\alpha)$.

---

1) Por la correspondencia de Galois, cada subcuerpo M con $[L:M]=2$ está determinado por un subgrupo H de orden $|H| = [L:H'] = 2$ mediante $M = H'$. Los subgrupos de orden dos de un grupo están en biyección con los elementos de orden 2, que en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ son $(1,0)$, $(1,2)$ y $(0,2)$. Por tanto hay tres subcuerpos con $[L:M]=2$ y como $H \lhd \mathcal{G}(L/K)$ (el grupo es abeliano) para todos ellos M/K es normal (segunda parte del teorema fundamental).

2) a) [V] El automorfismo es $\sigma(\zeta) = \zeta^{1006} = \zeta^5$ con $\zeta = e^{2\pi i/7}$. Como $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ es de Galois de grado 6, basta comprobar que σ^2 y σ^3 no son la identidad, que se sigue de $5^2, 5^3 \not\equiv 1 \pmod 7$.
b) [V] $\mathbb{Q}\big(e^{2\pi i/13}\big)$ es el cuerpo de descomposición de $x^{13}-1$.

3) Como $[\mathbb{F}_2(\alpha):\mathbb{F}_2] = 4$ y la característica es 2, se tiene $\mathbb{F}_2(\alpha) \cong \mathbb{F}_{2^4}$. Por la teoría, $\mathbb{F}_2(\alpha)/\mathbb{F}_2$ es de Galois y su grupo de Galois es de orden 4 generado por $\phi : x \mapsto x^2$. Se tiene $M \subset \langle \phi^2 \rangle'$ porque $\phi^2(\alpha+\alpha^4) = \alpha^4 + \alpha^{16} = \alpha^4 + \alpha$ (ya que $x^{16}-x=0$ define $\mathbb{F}_{16}$) y además $M \neq \mathbb{F}_2$ ya que $\alpha^4+\alpha = \alpha^3+1+\alpha \in \mathbb{F}_2$ contradiría que el polinomio de partida es irreducible. En definitiva, se tiene $\mathbb{F}_2 \subsetneqq M \subset \langle\phi^2\rangle' \subsetneqq \{\mathrm{Id}\}' = \mathbb{F}_2(\alpha)$. [De hecho, como $[\langle\phi^2\rangle' : \mathbb{F}_2] = 2$, es $M = \langle\phi^2\rangle'$.]