Teoría de Galois — Curso 2012-2013

3º de Matemáticas — 9 de octubre de 2012

Examen Parcial 1

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ____________ Firma ____________________

$\square + \square + \square = \square$

1) (4 puntos) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $x^5 + e^{2\pi i/11}x^3 + \sqrt[4]{2}x^2 + \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Probar que también es raíz de algún $P \in \mathbb{Q}[x]$ con $1 \le \partial P \le 400$.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) El polinomio $x^4 + x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{F}_2$.
b) La longitud $\sqrt[6]{2} + \sqrt{7}$ es construible con regla y compás.

3) (3 puntos) Sean $K(\alpha)/K$ y $K(\beta)/K$ extensiones de grado 4 y 1006 respectivamente tales que $[K(\alpha,\beta) : K] \ne 4024$. Demostrar $[K(\alpha,\beta) : K] = 2012$ y dar algún ejemplo de α, β y K con estas propiedades.

---

1) El problema equivale a probar $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \le 400$. Para escribir menos definimos $\alpha_1 = e^{2\pi i/11}$, $\alpha_2 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ y $\alpha_4 = \alpha$ y consideramos $K_j = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ con $K_0 = \mathbb{Q}$. Entonces $[K_1 : K_0] \le 10$, $[K_2 : K_1] \le 4$, $[K_3 : K_2] \le 2$ y $[K_4 : K_3] \le 5$ porque $x^{10} + x^9 + \cdots + 1$, $x^4 - 2$, $x^2 - 1 - \sqrt{2}$ y el polinomio del enunciado son, respectivamente para $1 \le j \le 4$, polinomios en $K_{j-1}[x]$ con α_j como raíz. Así pues $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \le [K_4 : \mathbb{Q}] \le 10 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 400$.

2) a) [F] $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2$ porque $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ en $\mathbb{F}_2$.
b) [F] Como $\sqrt{7}$ es construible, si fuera verdad, $(\sqrt[6]{2} + \sqrt{7}) - \sqrt{7} = \sqrt[6]{2}$ también sería construible y eso es falso porque $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) : \mathbb{Q}] = 6 \ne 2^j$ (el polinomio mínimo es $x^6 - 2$).

3) Sea $n = [K(\alpha,\beta) : K]$. Sabemos que $1006 = [K(\alpha) : K] \mid n$ y $4 = [K(\beta) : K] \mid n$, por tanto $2012 = \mathrm{mcm}(1006, 4) \mid n$. Además $[K(\alpha,\beta) : K(\beta)] \le [K(\alpha) : K]$ ya que el polinomio mínimo de α sobre K podría factorizar en $K(\beta)[x]$. Entonces $2012 \mid n \le [K(\alpha) : K][K(\beta) : K] \le 4 \cdot 1006 = 4024$. Esto sólo deja la posibilidad $n = 2012$.

Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt[4]{2}$, $\beta = \sqrt[1006]{2}$. Se tiene $K(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$ con $\gamma = \sqrt[2012]{2}$ porque $\alpha = \gamma^{503}$, $\beta = \gamma^2$ y $\gamma = \alpha\beta^{-251}$. El polinomio mínimo de $\sqrt[k]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $x^k - 2$, entonces $[\mathbb{Q}(\sqrt[k]{2}) : \mathbb{Q}] = k$.