Teoría de Galois **3º de Matemáticas**

Curso 2012-2013 11 de junio de 2013

Examen extrordinario

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ______________ Firma ______________________

$\square + \square + \square + \square = \square$

1) (2.5 puntos) Explica con tus palabras qué es una extensión normal y da un ejemplo de tres cuerpos $K \subset M \subset L$ tales que M/K sea normal y L/M no lo sea.

2) (2.5 puntos) Sea $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ con $\zeta = e^{2\pi i/13}$ y $M = \mathbb{Q}\big(\zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{8} + \zeta^{-8}, \zeta^{7} + \zeta^{-7} + \zeta^{9} + \zeta^{-9}\big)$. Hallar los automorfismos de $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ que dejan fijos los elementos de M.

3) (2.5 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es construible con regla y compás entonces $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica.
b) El polinomio $x^{2012} - 2013$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\big)$.

4) (2.5 puntos) Sea una extensión de Galois L/K con $\mathcal{G}(L/K) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_4$. Hallar cuántos subcuerpos son extensiones de grado 12 de K.

---

1) Una extensión algebraica L/K es normal si cualquier polinomio irreducible $P \in K[x]$ o bien no tiene raíces en L o bien descompone en factores lineales en L.

Consideramos $K = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$. entonces M/K es normal porque M es el cuerpo de descomposición de $x^2 - 2 \in K[x]$, mientras que L/M no es normal porque $x^3 - 2 \in M[x]$ tiene una raíz $\sqrt[3]{2} \in L - M$ y las otras raíces son complejas y por tanto no están en L.

2) Escribamos $x_1 = \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{8} + \zeta^{-8}$ y $x_2 = \zeta^{7} + \zeta^{-7} + \zeta^{9} + \zeta^{-9}$. Sabemos que $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \{\sigma_k : 1 \le k < 13\}$ con $\sigma_k(\zeta) = \zeta^k$. Para que x_1 quede invariante sólo puede ocurrir ζ se aplique en ζ, ζ^{-1}, ζ^{8} o ζ^{-8}, porque $\{\zeta^k \ : \ 1 \le k < 13\}$ es una base de $L/\mathbb{Q}$. Entonces sólo hay que comprobar si $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, $\sigma_{12} = \sigma_{-1}$, σ_8 y $\sigma_5 = \sigma_{-8}$ dejan fijos a x_1 y x_2. Obviamente σ_1 y σ_{12} lo hacen. También σ_8 porque $8 \cdot 8 \equiv -1 \pmod{13}$, $7 \cdot 8 \equiv -9 \pmod{13}$, $9 \cdot 8 \equiv 7 \pmod{13}$, y σ_5 también debe dejarlos fijos pues es σ_8^{-1}.

3) a) [V] Construible con regla y compás implica $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$ y finita implica algebraica.

b) [F] El polinomio es irreducible por Eisenstein con $p = 3$. Si α es una raíz, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2012$ mientras que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, con lo cual $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es imposible.

4) Por la correspondencia de Galois, basta hallar los subgrupos de $S_3 \times \mathbb{Z}_4$ de índice 12, o lo que es lo mismo, de orden 2. Estos subgrupos están en biyección con los elementos de orden 2, que son de la forma $\tau \times \overline{0}$, $\mathrm{Id} \times \sigma$ y $\tau \times \sigma$ con τ y σ de orden 2 en S_3 y en $\mathbb{Z}_4$ respectivamente. Entonces $\tau \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, $\sigma = \overline{2}$ y hay $3 + 1 + 3 = 7$ posibilidades.