Un problema curioso de teoría de cuerpos

A raíz de un error mío y de cierta duda de un alumno, pensé en la siguiente pregunta:

Sean $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ los cuerpos de descomposición de $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[x]$, respectivamente. Si $M_1 \cap M_2 = \mathbb{Q}$, ¿es verdad que para cualquier $\alpha \in M_1$ sus polinomios mínimos sobre M_2 y sobre $\mathbb{Q}$ coinciden?

No conseguí resolverla. Le agradezco a Andrei Jaikin la siguiente solución, que da una respuesta afirmativa, también agradezco a Yolanda Fuertes resolverme una duda posterior sobre dicha solución. Es curioso que un problema tan natural no tenga una solución más sencilla. Nótese que la hipótesis de ser cuerpo de descomposición no es superflua, para $M_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $M_2 = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{2})$ y $\alpha = \sqrt[3]{2}$, no se cumple.

Sea M el cuerpo obtenido al añadir a M_2 los elementos de M_1 (o viceversa). La extensión $M/\mathbb{Q}$ es de Galois (al cambiar $\mathbb{Q}$ por un cuerpo general, hay que apelar a un conocido resultado para la separabilidad). Escribamos $G = \mathcal{G}(M/\mathbb{Q})$, $N_1 = \mathcal{G}(M/M_1)$, $N_2 = \mathcal{G}(M/M_2)$ y $H = \mathcal{G}(M/\mathbb{Q}(\alpha))$. La correspondencia de Galois asegura $N_1 \lhd G$ y $N_2 \lhd G$.

Se debe tener $N_1 \cap N_2 = \{\mathrm{Id}\}$ porque $M_1 \cap M_2 = \mathbb{Q}$. Se cumple, $\mathcal{G}(M/M_2(\alpha)) = H \cap N_2$ (porque son automorfismos que fijan $\mathbb{Q}(\alpha)$ y M_2). Además, y éste es un punto ingenioso, $H = (H \cap N_2) \cdot N_1$ porque $\mathbb{Q}(\alpha) = M_2(\alpha) \cap M_1$ y $(H \cap N_2) \cdot N_1$ es el subgrupo más pequeño que contiene a $H \cap N_2$, los que fijan $M_2(\alpha)$, y a N_1, los que fijan M_1. De la misma forma, $G = N_1 \cdot N_2$.

De la igualdad de índices de subgrupos $[N_1 \cdot N_2 : (H \cap N_2) \cdot N_1] = [N_2 : H \cap N_2]$, ambos son $|N_2|/|H \cap N_2|$, se sigue, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [M_2(\alpha) : M_2]$ y por tanto los polinomios mínimos coinciden.

Nota: Apelar a $\mathbb{C}$ y a $\mathbb{Q}$ es sólo para fijar ideas, la solución se generaliza al caso en que M_1/K y M_2/K son extensiones de Galois.