42) Nota que $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{5}$ cumple $\alpha^2 = 8+2\sqrt{15}$ por tanto α es raíz del polinomio $P = x^2-8-2\sqrt{15} \in \mathbb{Q}(\sqrt{15})[x]$. Si P no fuera irreducible, entonces $\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{15})$ y elevando al cuadrado, con un poco de trabajo, $\sqrt{3}+\sqrt{5} = a+b\sqrt{15}$ lleva a una contradicción.

---

43) La clave para calcular inversos está en hacer el algoritmo de Euclides para obtener la identidad de Bezout. Si no sabes de qué hablo, mira la demostración de la Prop.2.2.4. Lo que hago es repetir el procedimiento indicado para $Q_1 = x+1$, $Q_2 = x-1$ y $P = x^3-x-2$. Con el algoritmo de Euclides, se tiene

$$1 = -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}(x^2+x)Q_2 \quad \overset{x=\alpha}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{2}\big(\alpha^2+\alpha\big).$$

Multiplicando por $\alpha+1$ se tiene $(\alpha+1)/(\alpha-1) = \frac{1}{2}\big(\alpha^3+2\alpha^2+\alpha\big)$, que usando $P(\alpha)=0$ se simplifica a $\alpha^2+\alpha+1$.
