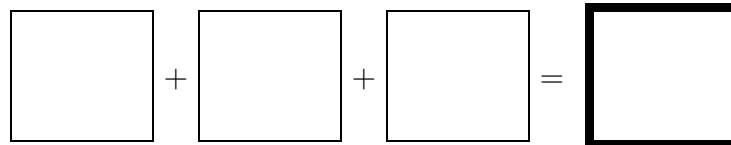


APELLIDOS Y NOMBRE _____

D.N.I. _____ FIRMA _____



1) (4 puntos) Sea una extensión de Galois L/\mathbb{Q} con $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$. Hallar cuantos subcuerpos son extensiones de grado 6 de \mathbb{Q} .

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Existe una extensión radical L/\mathbb{Q} con más de 2013 subcuerpos.
- b) Si $\mathbb{Q} \subset M \subset L$ y L/\mathbb{Q} es de Galois, entonces M/\mathbb{Q} también lo es.

3) (3 puntos) Explica con tus palabras qué dice el teorema fundamental de la teoría de Galois y pon un ejemplo con una extensión no trivial. Nota: No hace falta que en el ejemplo des detalles.

1) Según la correspondencia de Galois un subcuerpo de grado 6 está asociado a un subgrupo de índice 6, entonces hay que hallar cuántos $H < S_3 \times \mathbb{Z}_2$ cumplen $[S_3 \times \mathbb{Z}_2 : H] = 6$, lo cual equivale a $|H| = 2$ porque $|S_3 \times \mathbb{Z}_2| = 12$. Los subgrupos de orden 2 están generados por elementos de orden 2 y en biyección con ellos. Un elemento de orden 2 en $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ es de la forma (τ, \bar{n}) con $\tau^2 = \text{Id}$, excluyendo el elemento neutro $(\text{Id}, \bar{0})$. Entonces τ es una trasposición o la identidad y las posibilidades son los subgrupos generados por $(\tau, \bar{0})$, $(\tau, \bar{1})$ y $(\text{Id}, \bar{1})$ con $\tau \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Esto hacen 7 posibilidades.

2) a) [V] L/\mathbb{Q} con $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots, \sqrt[2015]{2})$ es radical tomando en la definición $L_j = L_{j-1}(\sqrt[j]{2})$ y tiene al menos los subcuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt[j]{2})$ con $2 \leq j \leq 2015$.

a) [F] Contraejemplo: L el cuerpo de descomposición de $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. L/\mathbb{Q} es de Galois por ser cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} pero M/\mathbb{Q} no lo es porque $x^3 - 2$ es irreducible sobre \mathbb{Q} con una raíz $\sqrt[3]{2} \in M$ pero las otras no están en M (son complejas), por tanto no es normal.

3) Dice que para extensiones L/K de Galois hay una correspondencia biyectiva entre subcuerpos de la extensión y subgrupos del grupo de Galois. Esta correspondencia asigna a cada subcuerpo los K -automorfismos que fijan sus elementos. Además, el grupo de Galois de L/M es normal en el de L/K (con M un subcuerpo) si y sólo si M/K es normal, en cuyo caso su grupo de Galois es isomorfo al cociente de ambos. **Ejemplo:** $\mathcal{G}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tiene 3 subgrupos propios, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$ tiene tres subcuerpos propios. En este caso son $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. Todos ellos son extensiones normales de \mathbb{Q} .