Álgebra II — **3º de Matemáticas**

CURSO 2012-2013 — 26 DE ABRIL DE 2013

EXAMEN PARCIAL 2

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

$\square + \square + \square = \square$

1) (4 puntos) Sea una extensión de Galois $L/\mathbb{Q}$ con $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$. Hallar cuantos subcuerpos son extensiones de grado 6 de $\mathbb{Q}$.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Existe una extensión radical $L/\mathbb{Q}$ con más de 2013 subcuerpos.
b) Si $\mathbb{Q} \subset M \subset L$ y $L/\mathbb{Q}$ es de Galois, entonces $M/\mathbb{Q}$ también lo es.

3) (3 puntos) Explica con tus palabras qué dice el teorema fundamental de la teoría de Galois y pon un ejemplo con una extensión no trivial. <u>Nota</u>: No hace falta que en el ejemplo des detalles.

---

1) Según la correspondencia de Galois un subcuerpo de grado 6 está asociado a un subgrupo de índice 6, entonces hay que hallar cuántos $H < S_3 \times \mathbb{Z}_2$ cumplen $[S_3 \times \mathbb{Z}_2 : H] = 6$, lo cual equivale a $|H| = 2$ porque $|S_3 \times \mathbb{Z}_2| = 12$. Los subgrupos de orden 2 están generados por elementos de orden 2 y en biyección con ellos. Un elemento de orden 2 en $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ es de la forma $(\tau, \overline{n})$ con $\tau^2 = \mathrm{Id}$, excluyendo el elemento neutro $(\mathrm{Id}, \overline{0})$. Entonces τ es una trasposición o la identidad y las posibilidades son los subgrupos generados por $(\tau, \overline{0})$, $(\tau, \overline{1})$ y $(\mathrm{Id}, \overline{1})$ con $\tau \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$. Esto hacen 7 posibilidades.

2) a) [V] $L/\mathbb{Q}$ con $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots, \sqrt[2015]{2})$ es radical tomando en la definición $L_j = L_{j-1}(\sqrt[j+1]{2})$ y tiene al menos los subcuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt[j]{2})$ con $2 \le j \le 2015$.
a) [F] Contraejemplo: L el cuerpo de descomposición de $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. $L/\mathbb{Q}$ es de Galois por ser cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ pero $M/\mathbb{Q}$ no lo es porque $x^3 - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ con una raíz $\sqrt[3]{2} \in M$ pero las otras no están en M (son complejas), por tanto no es normal.

3) Dice que para extensiones L/K de Galois hay una correspondencia biyectiva entre subcuerpos de la extensión y subgrupos del grupo de Galois. Esta correspondencia asigna a cada subcuerpo los K-automorfismos que fijan sus elementos. Además, el grupo de Galois de L/M es normal en el de L/K (con M un subcuerpo) si y sólo si M/K es normal, en cuyo caso su grupo de Galois es isomorfo al cociente de ambos. Ejemplo: $\mathcal{G}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tiene 3 subgrupos propios, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$ tiene tres subcuerpos propios. En este caso son $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. Todos ellos son extensiones normales de $\mathbb{Q}$.