Álgebra II **3º de Matemáticas**

Curso 2012-2013 8 de marzo de 2013

Examen Parcial 1

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ______________ Firma ______________________

$\square + \square + \square = \boxed{}$

1) (4 puntos) Sea $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] \ : \ a + b \text{ es par}\}$ Probar que I es un ideal de $\mathbb{Z}[i]$. ¿Se cumple $I = \langle 1 + i\rangle$?

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es construible con regla y compás, entonces $\sqrt[3]{\alpha}$ no lo es.
b) El polinomio $x^3 + 3x - 2013$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3) (3 puntos) Probar $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \le 540$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de $x^3 + e^{2\pi i/11}x^2 + \sqrt[6]{2}x + \sqrt[9]{2}$.

---

1) Claramente I es un subgrupo aditivo porque si $2|a + b$ y $2|c + d$ entonces $2|(a - c) + (b - d)$. Falta comprobar que si $a + bi \in I$ y $c + di \in \mathbb{Z}[i]$ entonces $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i \in I$, que equivale a $2|a(c + d) + b(c - d)$ y esto se cumple siempre porque módulo 2, $a \equiv b$.

Como $1 + i \in I$, $\langle 1 + i\rangle \subset I$ es obvio. Por otro lado, si $a + bi \in I$, entonces $a + b$ y $b - a$ son pares y se tiene $a + bi = (1 + i)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i\right) \in \langle 1 + i\rangle$.

2) a) [F] Contraejemplo: $\alpha = \sqrt{8}$ es construible y $\sqrt[3]{\alpha} = \sqrt{2}$ también.

b) [V] Si no fuera irreducible tendría una raíz $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. El polinomio es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por Eisenstein con $p = 3$, entonces $3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 1 \cdot 2$, lo cual es una contradicción.

3) Sean $L_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt[6]{2}, \sqrt[9]{2}\right)$, $L_2 = L_1\left(e^{2\pi i/11}\right)$ y $L_3 = L_2(\alpha)$. Se cumple $L_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt[18]{2}\right)$ porque $\sqrt[18]{2} = \sqrt[6]{2}/\sqrt[9]{2}$, $\sqrt[6]{2} = \left(\sqrt[18]{2}\right)^3$ y $\sqrt[9]{2} = \left(\sqrt[18]{2}\right)^2$. Entonces $[L_1 : \mathbb{Q}] = 18$. Además $[L_2 : L_1] \le 10$ y $[L_3 : L_2] \le 3$ porque $e^{2\pi i/11}$ es raíz de $x^{10} + x^9 + \cdots + 1$ y α es raíz del polinomio del enunciado. Así pues, $[L_3 : \mathbb{Q}] \le 18 \cdot 10 \cdot 3 = 540$ y el resultado se deduce de que $\alpha \in L_3$.