Álgebra II **3º de Matemáticas**

Curso 2012-2013 27 de junio de 2013

Examen extrordinario

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ____________ Firma ______________________

	+		+		+		=	

1) (2.5 puntos) Explica con tus palabras qué es el grado de una extensión. Intenta dar un argumento con el que pudieras convencer a alguien que no ha seguido esta asignatura que la cantidad $1/\big(7+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\big)$ se puede escribir como un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$ evaluado en $\sqrt[3]{2}$.

2) (2.5 puntos) Sea $\zeta = e^{2\pi i/7}$. Estudiar si $\alpha = \big(\zeta+\zeta^2+\zeta^4\big)^{2013} + \big(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6\big)^{2013}$ es un número racional. Sugerencia: Emplear $\mathcal{G}\big(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}\big)$.

3) (2.5 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $K \subset L \subset M$ con M/L y L/K extensiones normales, entonces M/K también es normal.

b) Si I es un ideal principal en un anillo conmutativo R entonces dado cualquier $\alpha \in R-\{0\}$, $J = \alpha I$ es también un ideal principal.

4) (2.5 puntos) Halla razonadamente el polinomio mínimo de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$.

---

1) Dada una extensión L/K, su grado $[L:K]$ es la dimensión de L como espacio vectorial sobre K. Por la identidad de Bezout (Conjuntos y Números) sabemos que existen $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $1 = (7+x+x^2)P(x) + (x^3-2)Q(x)$. Sustituyendo $x = \sqrt[3]{2}$, la expresión del enunciado es $P\big(\sqrt[3]{2}\big)$.

2) Como $L/\mathbb{Q}$ con $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ es de Galois (cuerpo de descomposición de x^7-1), se tiene $\mathcal{G}\big(L/\mathbb{Q}\big)' = \mathbb{Q}$. Entonces basta demostrar que α es invariante por todos los elementos de $\mathcal{G}\big(L/\mathbb{Q}\big) = \{\sigma_j \ :\ 1 \le j < 7\}$ con $\sigma_j(\zeta) = \zeta^j$. Se pueden abreviar los cálculos usando que $\mathcal{G}\big(L/\mathbb{Q}\big) = \langle \sigma_3 \rangle$ y entonces basta ver que $\sigma_3(\alpha) = \big(\zeta^3+\zeta^6+\zeta^5\big)^{2013} + \big(\zeta^2+\zeta+\zeta^4\big)^{2013} = \alpha$.

3) a) [F] $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $M = \mathbb{Q}\big(\sqrt[4]{2}\big)$. M/L y L/K son normales por ser cuerpos raíz de x^2-2 y $x^2-\sqrt{2}$, pero M/K no es normal porque x^4-2 es irreducible sobre K y tiene dos raíces en M pero no las otras dos. b) [V] $I = \langle \beta \rangle$ implica $J = \langle \alpha\beta \rangle$.

4) $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow (\alpha-\sqrt{2})^2 = 3 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha = 1 \Rightarrow (\alpha^2-1)^2 = \big(2\sqrt{2}\alpha\big)^2 \Rightarrow \alpha$ es raíz del polinomio mónico $x^4-10x^2+1 \in \mathbb{Q}[x]$. Debe ser el polinomio mínimo porque, por lo visto en clase, $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ tiene grado 4 sobre $\mathbb{Q}$. Otra posibilidad es comprobar que es irreducible.