Algunos problemas del Capítulo 3 (14 de noviembre)

---

81) Distinguimos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Si $M = K(a)$ entonces cualquier $\sigma \in \mathcal{G}(L/K)$ que fije a debe fijar también todo $K(a)$, esto es, $\sigma \in \mathcal{G}(L/M)$.

$\Leftarrow$) Si no fuera $M = K(a)$, tomemos $b \in M - K(a)$. Como $b \notin K(a)$ y $L/K(a)$ es de Galois (por serlo L/K), existe un automorfismo $\sigma \in \mathcal{G}(L/K(a))$ que no fija b (uno que mande b a otra de las raíces de su polinomio mínimo). Entonces $\sigma(a) = a$ y $\sigma(b) \neq b$, en particular $\sigma \notin \mathcal{G}(L/M)$ a pesar de que σ fija a.

La extensión $L/\mathbb{Q}$ es de Galois para $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Tomando $L = M$ y $K = \mathbb{Q}$ en el resultado anterior, basta probar que $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ no queda fijo por ningún automorfismo del grupo de Galois y eso es evidente porque todos ellos actúan como $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$ y $\sqrt{3} \mapsto \pm\sqrt{3}$ (permutan raíces).

El caso $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{17}, \sqrt{17})$ es similar salvo que ahora hay que tomar $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{17}, \sqrt{17})$ dentro de $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{17}, \sqrt{17}, e^{2\pi i/3})$, para que L/K sea de Galois con $K = \mathbb{Q}$. No hace falta calcular $\mathcal{G}(L/K)$. Simplemente usar como antes que los automorfismos pasan raíces en raíces y que sólo la conjugación compleja fija $a = \sqrt[3]{17} + \sqrt{17}$.

---

82) L/K separable implica L/M seprable porque el polinomio mínimo de $\alpha \in L$ sobre M divide al polinomio mínimo sobre K. Por otro lado, normal y finita equivale a cuerpo de descomposición y de $K[x] \subset M[x]$ se sigue que L/K normal y finita implica L/M normal y finita. En definitiva L/K es de Galois implica L/M es de Galois.

La otra afirmación no es cierta, por ejemplo $L/\mathbb{Q}$ con $L = Q\big(\sqrt[4]{2}, i\big)$ es de Galois, pero $Q\big(\sqrt[4]{2}\big)/\mathbb{Q}$ no es normal.

---

84) En primer lugar se prueba $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, esto se puede hacer fácilmente con el problema **81** o con las técnicas del caitulo 2 o directamente notando que $2i = (\sqrt{2}+i) - 3/(\sqrt{2}+i)$. La extensión $L/\mathbb{Q}$ es de Galois, por ser cuerpo de descomposición de $(x^2 - 2)(x^2+1)$. Se tiene $[L : \mathbb{Q}] = 4$ (fácil) y hay cuatro posible automorfismos porque $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ y $\sigma(i) = \pm i$, por tanto todos se deben realizar (el orden del grupo de Galois coincide con el grado). Definamos σ_1 y σ_2 como los que actúan de la forma $\sigma_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$,

$\sigma_1(i) = i$ y $\sigma_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\sigma_2(i) = -i$. Entonces $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tiene tres subgrupos propios, los correspondientes a los elementos de orden dos $(\overline{1}, \overline{0})$, $(\overline{0}, \overline{1})$ y $(\overline{1}, \overline{1})$, hay sólo tres subcuerpos propios. A simple vista se ve que $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ son subcuerpos, por tanto son todos.

---

85) En las condiciones del enunciado, $L/\mathbb{Q}$ es de Galois y el teorema fundamental asegura que $M/\mathbb{Q}$ es normal si y sólo si $\mathcal{G}(L/M) \lhd \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ y esto siempre se cumple ya que todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales.

---

86) Llamemos M al cuerpo de descomposición del que nos hablan. La extensión $M/\mathbb{Q}$ es de Galois y por tanto $[M : \mathbb{Q}] = |\mathcal{G}(M/\mathbb{Q})| = |A_4| = 12$. El polinomio mínimo de θ es f, salvo multiplicar por una constante, y por tanto $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 4$. Si existiera un subcuerpo propio N de esta última extensión, debería ser $[N : \mathbb{Q}] = 2$. Sea $H = \mathcal{G}(M/N)$ el subgrupo que le corresponde por la correspondencia de Galois, entonces su orden es $|H| = [M : N] = [M : \mathbb{Q}]/[N : \mathbb{Q}] = 6$. Como A_4 no tiene subgrupos de orden 6 llegamos a una contradicción (un subgrupo de orden 6 debería contener un elemento de orden 3, un tres ciclo, y uno de orden 2, un producto de dos trasposiciones disjuntas, pero eso ya genera todo A_4).

Aprovecho para subsanar de dos maneras mi error al resolver el 49)

---

49) 1ª solución: Como $e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$, las raíces de $x^4 + 9$ son $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}(1 \pm i)$, es fácil ver que el cuerpo raíz es $L = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, i\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, i)$ y su grupo de Galois es, como hemos visto otras veces (por ejemplo en **84** más arriba) $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id}, \sigma, \tau, \sigma\tau\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con τ la conjugación y σ el automorfismo que fija i y aplica $\sqrt{6}$ en $-\sqrt{6}$.

2ª solución (arreglar lo de clase): El cuerpo raíz es $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ con $\alpha = \sqrt{3}e^{2\pi i/8}$ (visto en clase) y como $\alpha^2 = 3i$, de hecho $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. El polinomio mínimo de α es $x^4 + 9$ (comprobar que es irreducible). Por tanto se obtienen tres automorfismos no triviales al enviar α a las otras raíces del polinomio y $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ con $\sigma_j(\alpha) = \sqrt{3}e^{2\pi(2j+1)i/8} = \sqrt{3}e^{2\pi i/8}i^j$. Es un buen ejercicio comprobar con esta presentación que esto vuelve a ser isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.