Teoría de Galois **3^{o} de Matemáticas**
CURSO 2011-2012 13 DE JUNIO DE 2012

EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

	+		+		+		=	

1) (2 puntos) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ las raíces de $P = x^3 + 14x^2 + 8x - 64$. Sabiendo que el cuerpo $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ cumple $[L : \mathbb{Q}] = 3$, deducir:
a) P es irreducible en cualquier extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ y $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3$.
b) $\big(\alpha_1^n - \alpha_2^n\big)\big(\alpha_2^n - \alpha_3^n\big)\big(\alpha_3^n - \alpha_1^n\big) \in \mathbb{Q}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

2) (3 puntos) Describir el cuerpo de descomposición L de $P = x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y el grupo de Galois de $L/\mathbb{Q}$. *Indicación*: $P\big(\sqrt{2}\big) = 0$.

3) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) La extensión $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}, i\big)/\mathbb{Q}$ es normal.
b) Los anillos $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ y $\mathbb{F}_9$ son isomorfos.
c) La extensión $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2012}, e^{2\pi i/13}\big)/\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2012}\big)$ es de Galois.

4) (2 puntos [de dificultad mayor]) Sabiendo que $\cos(2\pi/5) = \big(\sqrt{5} - 1\big)/4$, deducir razonadamente un método válido para construir un pentágono regular con regla y compás.

Soluciones

1) a) El polinomio P tiene que ser irreducible sobre $\mathbb{Q}$, ya que en otro caso habría una raíz racional y se tendría $[L : \mathbb{Q}] < 3$, en particular $[\mathbb{Q}(\alpha_j) : \mathbb{Q}] = 3$ para $1 \le j \le 3$. Si no fuera irreducible en una extensión cuadrática $K/\mathbb{Q}$, entonces $\alpha_j \in K$ para algún j y $3 = [\mathbb{Q}(\alpha_j) : \mathbb{Q}] \mid [K : \mathbb{Q}] = 2$ lleva a una contradicción.

La extensión $L/\mathbb{Q}$ es de Galois por ser cuerpo de descomposición de un polinomio sobre $\mathbb{Q}$ entonces $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = [L : \mathbb{Q}] = 3$ y el único grupo de orden 3, salvo isomorfismos, es $\mathbb{Z}_3$.

b) El grupo de Galois permuta las raíces y teniendo en cuenta $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3$, la única posibilidad es $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$ con $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$, $\sigma(\alpha_2) = \alpha_3$ y $\sigma(\alpha_3) = \alpha_1$, ya que $\langle(1, 2, 3)\rangle$ es el único subgrupo de orden 3 de S_3. Como σ deja invariante la expresión del enunciado, ésta debe pertenecer al cuerpo base $\mathbb{Q} = \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})'$.

2) De $P(\sqrt{2}) = 0$ se deduce $x^2 - 2 \mid P$ y se llega a la descomposición $P = (x^3 - 1)(x^2 - 2)$, entonces $L = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}, \sqrt{2})$ o, usando la fórmula $e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$, $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt{2})$. Se cumple

$[L:\mathbb{Q}]=4$ ya que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=2$ y $[L:\mathbb{Q}(\sqrt{2})]=2$ porque $i\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. La extensión $L/\mathbb{Q}$ es de Galois (cuerpo de descomposición de un polinomio sobre $\mathbb{Q}$) por tanto $|\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})|=4$ y los elementos de $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ sólo pueden enviar $i\sqrt{3}$ a $\pm i\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ a $\pm\sqrt{2}$ (permuta las raíces del polinomio mínimo). Por tanto $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})=\{\mathrm{Id},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1\sigma_2\}$ con $\sigma_1(i\sqrt{3})=-i\sqrt{3}$, $\sigma_1(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, $\sigma_2(i\sqrt{3})=i\sqrt{3}$, $\sigma_2(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$. Todos los elementos excepto la identidad son de orden 2, así pues $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

3)

a) Falso. El polinomio x^3-2 es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ (Eisenstein) y tiene una raíz en $L=\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2},i\big)$. Si $L/\mathbb{Q}$ fuera normal, las otras también estarían en L. Pero $\sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}\in L$ implica $\sqrt{3}\in L$ porque $\sqrt[3]{2},i\in L$ y $e^{2\pi i/3}=(-1+i\sqrt{3})/2$. Entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)\subset L$ y en particular $4\mid[L:\mathbb{Q}]$. Esto es una contradicción porque $[L:\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},i):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=6$.

b) Falso. $\mathbb{F}_9$ es un cuerpo y en $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ por ejemplo $\overline{3}$ no tiene inverso.

c) Verdadero. Las raíces de $P=x^{13}-1$ son $\big(e^{2\pi i/13}\big)^k$, $0\le k<13$. Entonces $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2012},e^{2\pi i/13}\big)$ es el cuerpo de descomposición de P sobre $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2012}\big)$, en particular es de Galois.

4) Además de la longitud unidad, suponemos dadas dos rectas perpendiculares que consideramos los ejes X e Y que se cortan en el origen O (por cierto, es fácil construir con regla y compás la perpendicular a una recta). Poniendo una longitud 1 en OY y otra 2 (dos veces 1) en OX, construimos $(0,1)$ y $(2,0)$ que determinan un segmento de longitud $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Trasladándolo a OX y quitándole un segmento unidad, habremos construido $(\sqrt{5}-1,0)$. Dividiendo por 4 (hallando dos mediatrices) se obtiene $P=(\cos\frac{2\pi}{5},0)$. El corte con la circunferencia unidad de la perpendicular al eje X en P (una de las mediatrices) da el primer vértice del pentágono $V_1=(\cos\frac{2\pi}{5},\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5})$. Los otros se calculan trasladando con el compás el lado $(1,0)V_1$ a lo largo de la circunferencia.