Teoría de Galois **3º de Matemáticas**

CURSO 2011-2012 13 DE DICIEMBRE DE 2011

EXAMEN PARCIAL 3

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ______________ FIRMA ______________________

[ ] + [ ] + [ ] = [ ]

1) (3 puntos) Sea $K \subset L$ con L/K una extensión de Galois tal que $\mathcal{G}(L/K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Hallar cuántos subcuerpos M existen $K \subsetneqq M \subsetneqq L$.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente (dando una demostración o un contraejemplo) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para una extensión de Galois L/K con $\mathcal{G}(L/K)$ abeliano.

a) Necesariamente $\mathcal{G}(L/K) \ncong \mathbb{Z}_3$.

b) Todo subcuerpo de L/K es cuerpo de descomposición de algún $P \in K[x]$.

3) (4 puntos) Sea $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ con $\zeta = e^{2\pi i/7}$. Hallar el subgrupo H del grupo de Galois de $L/\mathbb{Q}$ tal que $H' = \mathbb{Q}\big(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4\big)$ y calcular $[\mathbb{Q}\big(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4\big) : \mathbb{Q}]$.

---

1) Por el teorema fundamental de la teoría de Galois, esto es equivalente a hallar cuántos subgrupos propios tiene $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Como este grupo tiene orden 9 los únicos subgrupos propios son de orden 3 y por tanto están generados por un elemento $(\overline{a}, \overline{b})$ de orden 3. Si $\overline{a} = \overline{0}$, la única posibilidad es $\langle(\overline{0}, \overline{1})\rangle$. Si $\overline{a} \neq \overline{0}$, podemos suponer $\overline{a} = \overline{1}$ porque $2(\overline{2}, \overline{b}) = (\overline{1}, \overline{2b})$. Entonces el resto de los subgrupos son $\langle(\overline{1}, \overline{0})\rangle$, $\langle(\overline{1}, \overline{1})\rangle$ y $\langle(\overline{1}, \overline{2})\rangle$ que claramente son distintos. Así pues, hay cuatro subcuerpos.

2) a) Falso. Por ejemplo $\mathcal{G}(\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{Z}_3$ o también $\mathcal{G}\big(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}(\omega)\big) \cong \mathbb{Z}_3$ con $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ porque $\sqrt[3]{2}$ sólo puede ir por un $\mathbb{Q}(\omega)$-automorfismo a $\sqrt[3]{2}$, $\omega\sqrt[3]{2}$ o $\omega^2\sqrt[3]{2}$ y ω queda fijo.

b) Verdadero. Para cualquier subcuerpo M se tiene $\mathcal{G}(L/M) \triangleleft \mathcal{G}(L/K)$ porque $\mathcal{G}(L/K)$ es abeliano. De la segunda parte del teorema fundamental de la teoría de Galois se deduce que M/K es normal, en particular M es cuerpo de descomposición de algún $P \in K[x]$.

3) Sabemos que $\mathcal{G}(L/K) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\} = \langle\sigma_3\rangle \cong \mathbb{Z}_6$ con $\sigma_k = \zeta^k$. Se tiene $\sigma_3(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4) = \zeta^3 + \zeta^6 + \zeta^5 = -1 - \zeta - \zeta^2 - \zeta^4 \neq \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$, donde se ha usado $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^6 = 0$ y que $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^5\}$ forman una base. Entonces $H \neq \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ y las únicas posibilidades son $H = \langle\sigma_3^2\rangle$, $H = \langle\sigma_3^3\rangle$ y $H = \{\mathrm{Id}\}$. Notando que $\sigma_3^2 = \sigma_2$, se cumple $\sigma_3(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4) = \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta$ y por tanto se deduce $H = \langle\sigma_3^2\rangle$, que tiene orden 3. Por consiguiente $[\mathbb{Q}\big(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4\big) : \mathbb{Q}] = [H' : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}]/[L : H'] = 6/|H'| = 2$.