Teoría de Galois — Curso 2011-2012

3º de Matemáticas — 21 de noviembre de 2011

Examen Parcial 2

Apellidos y Nombre ____________________

D.N.I. ____________ Firma ____________________

[ ] + [ ] + [ ] = [ ]

1) (3 puntos) Sea L el cuerpo de descomposición de $(x^3-7)(x^2+2x-2)$ sobre $K=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Calcular el grado de L/K.

2) (3 puntos) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es normal.
b) Para $L=\mathbb{F}_2[x]/\langle x^2+x+1\rangle$ se tiene $\mathcal{G}(L/\mathbb{F}_2)\cong\mathbb{Z}_2$.

3) (4 puntos) Justificar que existe $\sigma\in\mathcal{G}\big(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)/\mathbb{Q}\big)$ tal que $\sigma(i)=i$ y $\sigma(\sqrt[4]{2})=i\sqrt[4]{2}$. Calcular el subcuerpo $\langle\sigma^2\rangle'$.

---

1) Las raíces de x^3-7 son $\sqrt[3]{7}$, $\omega\sqrt[3]{7}$ y $\omega^2\sqrt[3]{7}$ con $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$ y las de x^2+2x-2 son $-1\pm\sqrt{3}$, entonces $L=K(\sqrt[3]{7},\omega,\sqrt{3})=K(\sqrt[3]{7},i)$. Para la última igualdad sólo se está usando $\mathbb{Q}(\sqrt{3},i\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$.

Como $i\notin K$ y es raíz de x^2+1, $[K(i):K]=2$. Al ser $\sqrt[3]{7}$ raíz de x^3-7, $[L:K(i)]\le 3$ pero <u>no es totalmente obvio</u> que sea tres y el criterio de Eisentein no se aplica en $K(i)[x]$. Lo que sí sabemos es $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}):\mathbb{Q}]=3$ y esta cantidad divide a $[L:\mathbb{Q}]=[L:K(i)][K(i):K][K:\mathbb{Q}]$. Los dos últimos factores son doses, así pues concluimos $[L:K(i)]=3$ y $[L:K]=3\cdot 2=6$.

2) a) [V] El cuerpo de descomposición de $x^2-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ es $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[4]{2},-\sqrt[4]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es normal (normal y finita $\Leftrightarrow$ cuerpo de descomposición).

b) [V] Sabemos que $L\cong\mathbb{F}_4$ y $[\mathbb{F}_4:\mathbb{F}_2]=2$ (en general $[\mathbb{F}_{p^n}:\mathbb{F}_p]=n$). Al ser $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ normal, $|\mathcal{G}(L/\mathbb{F}_2)|=[\mathbb{F}_4:\mathbb{F}_2]$ y $\mathbb{Z}_2$ es el único de orden 2, salvo isomorfismos.

3) Escribamos $L=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$. La extensión $L/\mathbb{Q}$ es normal porque L es el cuerpo de descomposición de x^4-2, que es irreducible por el criterio de Eisentein. Entonces existe $\rho\in\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ con $\rho(\sqrt[4]{2})=i\sqrt[4]{2}$ (ya que $\sqrt[4]{2}$, $i\sqrt[4]{2}$ son raíces de x^4-2). Además $\rho(i)=\pm i$ (porque $\pm i$ son raíces de x^2+1). Si $\rho(i)=i$, tomamos $\sigma=\rho$ y si $\rho(i)=i$, tomamos $\sigma=\rho\circ\tau$ con τ la conjugación compleja.

Por la definición, $\sigma^2(i)=i$ y $\sigma^2(\sqrt[4]{2})=\sigma(i\sqrt[4]{2})=-\sqrt[4]{2}$. Como $\{1,i\}$ y $\{1,\sqrt[4]{2},(\sqrt[4]{2})^2,(\sqrt[4]{2})^3\}$ son bases de $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$, cada $x\in L$ se escribe de manera única como

$$x=\lambda_0+\lambda_1\sqrt[4]{2}+\lambda_2(\sqrt[4]{2})^2+\lambda_3(\sqrt[4]{2})^3+\lambda_4 i+\lambda_5 i\sqrt[4]{2}+\lambda_6 i(\sqrt[4]{2})^2+\lambda_7 i(\sqrt[4]{2})^3,\quad \text{con } \lambda_i\in\mathbb{Q}.$$

y $x\in\langle\sigma^2\rangle'$ si y sólo si esta expresión coincide con

$$\sigma^2(x)=\lambda_0-\lambda_1\sqrt[4]{2}+\lambda_2(\sqrt[4]{2})^2-\lambda_3(\sqrt[4]{2})^3+\lambda_4 i-\lambda_5 i\sqrt[4]{2}+\lambda_6 i(\sqrt[4]{2})^2-\lambda_7 i(\sqrt[4]{2})^3.$$

Es decir, cuando $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5=\lambda_7=0$, o equivalentemente si y sólo si $x\in\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$.