Teoría de Galois | **3^{o} de Matemáticas**
CURSO 2011-2012 | 11 DE OCTUBRE DE 2011

EXAMEN PARCIAL 1

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ____________ FIRMA ____________________

	+		+		=	

1) (4 puntos) Si $K(\alpha)/K$ es una extensión de grado tres, calcular $[K(\alpha^2):K]$. Suponiendo que α es una raíz de x^3+x-1, decidir si x^3+2x^2+x-1 es el polinomio mínimo de α^2.

2) (3 puntos) Dar razonadamente en cada apartado un ejemplo de un cuerpo L que tenga la propiedad indicada o demostrar que tal ejemplo no existe.
a) $L/\mathbb{Q}(\pi)$ es algebraica y de grado mayor que 1.
b) $L/\mathbb{Q}$ es de grado 4 y $L \not\subset \mathbb{R}$.
c) $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{R}$, $[L:\mathbb{Q}] = 21$ y L contiene algún irracional construible con regla y compás.

3) (3 puntos) Consideramos el cuerpo $K = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$. Sea $\alpha = \overline{x+2} \in K$. Calcular α^{2011}.

---

1) De $K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$ se deduce que $[K(\alpha^2):K]$ divide a $[K(\alpha):K] = 3$. Sólo hay dos posibilidades: $[K(\alpha^2):K] = 3$ y $[K(\alpha^2):K] = 1$. La segunda es imposible porque si $\alpha^2 = k \in K$ entonces α es raíz de $x^2 - k \in K[x]$ y $[K(\alpha):K] \le 2$ contradice el enunciado.

Sean P y Q los polinomios del enunciado, respectivamente. Un cálculo prueba que $P(x)|Q(x^2)$. Así pues, $Q(x^2) = P(x)R(x)$ y sustituyendo $x = \alpha$ se tiene que α^2 es raíz de Q. Sabemos que el polinomio mínimo de α^2 tiene grado $[K(\alpha^2):K] = 3$ entonces éste debe ser Q (es mónico, tiene α^2 como raíz y grado mínimo).

2) a) $L = \mathbb{Q}(i,\pi)$. Claramente $i \notin \mathbb{Q}(\pi)$, por tanto $[L:\mathbb{Q}(\pi)] \neq 1$ y la extensión es algebraica porque i es raíz de x^2+1.
b) $L = \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$. El polinomio mínimo de $i\sqrt[4]{2}$ es x^4-2 por el criterio de Eisenstein, así pues $[L:\mathbb{Q}] = 4$.
c) No existe tal cuerpo porque si $\alpha \in L$, es construible con regla y compás $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2^n$, con $n \ge 1$ si α es irracional. Pero 2^n no divide a $[L:\mathbb{Q}] = 21$, contradiciendo que $\mathbb{Q}(\alpha) \subset L$.

3) Se tiene $\alpha^2 = \overline{x^2+4x+4} = \overline{x}$ donde se ha usado que $\overline{x^2} = \overline{-1}$ y la aritmética módulo 3. Elevando una vez más al cuadrado $\alpha^4 = \overline{x^2} = \overline{-1}$. Entonces

$$\alpha^{2011} = \left(\alpha^4\right)^{502} \cdot \alpha^2 \cdot \alpha = \overline{x} \cdot \overline{x+2} = \overline{x^2+2x} = \overline{2x-1} = \overline{2x+2}.$$