Integrales múltiples

Integrales iteradas

En principio, el cálculo de una *integral múltiple* (en varias variables) se reduce a ir calculando integrales de una variable en el orden especificado. El diferencial nos informa acerca del nombre de la variable con respecto a la que debemos integrar y su posición indica el orden de integración, correspondiendo los diferenciales más interiores a las integrales que hay que calcular primero.

Ejemplo. $\int_0^1\int_2^3(6x+6y^2)\,dxdy = \int_0^1\big(3x^2+6y^2x\big)\big|_{x=2}^3 dy$. Como la variable de integración es x, la y se trata como una constante. Sustituyendo los límites, queda

$$\int_0^1 \big(15+6y^2\big)\,dy = \big(15y+2y^3\big)\big|_0^1 = 15+2 = 17.$$

Para practicar, calculemos también $\int_2^3\int_0^1(6x+6y^2)\,dydx$, es decir, la integral pero intercambiando el orden de integración. El resultado es

$$\int_2^3 \big(6xy+2y^3\big)\big|_{y=0}^1 dx = \int_2^3 (6x+2)\,dx = \big(3x^2+2x\big)\big|_{x=2}^3 = 15+2 = 17.$$

No es casualidad que en el ejemplo anterior los resultados de los dos apartados coincidan. Hay un teorema llamado *teorema de Fubini* que asegura que el orden es irrelevante.

La mayor parte de las integrales múltiples que aparecen en las aplicaciones son *integrales dobles* o *integrales triples*, esto es, con 2 o 3 variables. En cuanto a la integración iterada, el número de variables es irrelevante.

Ejemplo. Para calcular $\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^1 x\cos(y+z)\,dxdydz$, se realizan integrales iteradas como antes:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{1}{2}x^2\cos(y+z)\big|_{x=0}^1 dydz = \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos(y+z)\,dydz = \int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{sen}(y+z)\big|_{y=0}^\pi\,dz.$$

Usando que $\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$ se tiene $\operatorname{sen}(y+z)\big|_{y=0}^\pi = -2\operatorname{sen} z$. Entonces el resultado es

$$-\int_0^\pi \operatorname{sen} z\,dz = \cos z\big|_{z=0}^\pi = -2.$$

También se pueden poner variables en los límites de integración.

Ejemplo. Integrando con respecto de x y después con respecto de y

$$\int_0^1 \int_0^y xy\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2y\big|_{x=0}^{y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^3\,dy = \frac{1}{8}y^4\big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

En este último ejemplo, no tiene sentido cambiar directamente el orden de integración, como antes, porque al integrar en x habría que sustituir unos límites que involucran una variable, la y, que ha desaparecido porque ya se ha integrado respecto de ella.

Integrales dobles. Áreas y volúmenes

Al igual que las integrales de una variable sirven para calcular el área bajo una gráfica, las integrales dobles sirven para calcular volúmenes. Concretamente, cuando $F \geq 0$, la integral $\int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dxdy$ es el volumen bajo la gráfica en el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$, esto es, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Lo mismo se cumple en regiones más generales. Es decir, si R es una región del plano y $F = F(x,y)$ es una función no negativa en ella, entonces

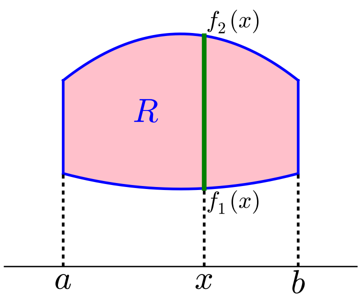
$$(1) \qquad \boxed{\iint_R F = \text{Volumen bajo la gráfica de } F \text{ sobre la región } R.}$$

Si $F = 1$, entonces como el volumen es el área de la base por la altura (uno en este caso)

$$(2) \qquad \boxed{\iint_R 1 = \text{Área de la región } R.}$$

Para dotar de significado a $\iint_R F$ hay que transformarla en una integral iterada como las de antes con unos límites específicos. Para ello podemos dividir la región R en "rodajas" (secciones) verticales u horizontales.

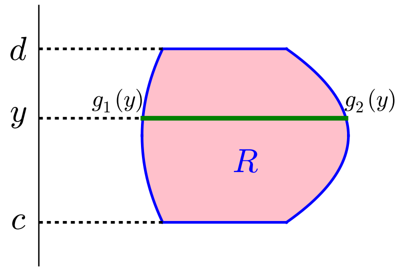
En el primer caso la x variará entre dos números (la abcisa de la primera y la última sección) y la y variará entre las gráficas de las funciones que limitan inferior y superiormente la región. Debemos entonces integrar primero en y para tener en cuenta la contribución de cada sección.



$$\iint_R F = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dydx.$$

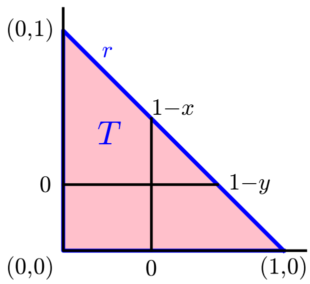
De la misma forma, cuando la región R está limitada a la izquierda y a la derecha por dos gráficas sencillas $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, puede ser más cómodo considerar secciones horizontales. En este caso la y será la que varíe entre dos números.

$$\iint_R F = \int_c^d \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\, dxdy.$$



Cualquiera de los dos métodos debe dar el mismo resultado. En algunos casos, se necesita una subdivisión de la región para aplicarlos. Por ejemplo, si quisiéramos integrar una región con forma de estrella, sería conveniente dividirla en triángulos, calcular las integrales sobre cada uno de ellos y sumar los resultados, porque una estrella no está directamente limitada por dos gráficas.

Ejemplo. Para el triángulo T de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, vamos a ver las dos posibles formas de escribir los límites de integración en $\iint_T F$.



$$r \equiv \quad x + y = 1$$
$$y = 1 - x$$
$$x = 1 - y$$

En el dibujo, la x varía entre 0 y 1, y para cada x fijada (para cada corte vertical), la y varía entre $y = 0$ e $y = 1 - x$, porque ésta es la ecuación de la recta que une $(0,1)$ y $(1,0)$ con la y despejada. Entonces

$$\iint_T F = \int_0^1 \int_0^{1-x} F(x,y)\, dydx.$$

De la misma forma, podemos decir que la y varía entre 0 y 1 y para cada y fijado (en cada corte horizontal), la x varía entre 0 y $1 - y$. Es decir,

$$\iint_T F = \int_0^1 \int_0^{1-y} F(x,y)\, dxdy.$$

Cualquiera de estas fórmulas se puede emplear para calcular el área del triángulo gracias a (2). Por ejemplo, la última resulta

$$A(T) = \iint_T 1 = \int_0^1 \int_0^{1-y} 1\, dxdy = \int_0^1 (1-y)\, dy = \frac{1}{2},$$

lo cual coincide con lo que daría la fórmula de la geometría elemental $\textsf{base} \cdot \textsf{altura}/2$.

Ejemplo. Calculemos el volumen limitado por $F(x,y) = 2 - x + y$ (esto es un plano) y por el círculo unidad C en el plano XY. Si utilizamos la estrategia de considerar secciones verticales en C, presentaremos el círculo unidad como

$$C = \{(x,y) \ : \ -1 \le x \le 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

De acuerdo con (1), el volumen viene dado por

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2-x+y)\, dydx = \int_{-1}^{1}\Big((2-x)y + \frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_{-1}^{1}(2-x)\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

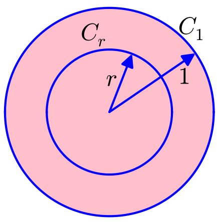
La última integral es un poco complicada y nos vamos a ayudar de que sabemos que $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi$ porque esta integral de una variable es el área del semicírculo de radio 1 (área del círculo $= \pi R^2$). Entonces la integral anterior es:

$$4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx + \int_{-1}^{1}(-2x)\big(1-x^2\big)^{1/2}\, dx = 4\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\big(1-x^2\big)^{3/2}}{3/2}\Big|_{-1}^{1} = 2\pi.$$

Cambio de variable

Hay funciones y regiones que tiene simetrías especiales y puede resultar conveniente calcular $\iint_R F$ dividiendo R en "rodajas" que no sean ni horizontales ni verticales, lo cual está relacionado con los cambios de coordenadas (cambios de variable).

Examinemos el caso en que R es un círculo (disco) D de radio r_0. En coordenadas polares (r,α), D es simplemente $0 \le r \le r_0$, $0 \le \alpha < 2\pi$. Entonces cada sección $r =$ constante es una circunferencia C_r de radio r. Ahora bien, aunque en todas ellas $0 \le \alpha < 2\pi$, está claro que son más pequeñas para radios menores y debieran influir menos en el resultado de la integral. Concretamente, su longitud decrece en proporción a r.



$$\frac{\ell(C_r)}{\ell(C_1)} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r.$$

Esto sugiere que la fórmula correcta para integrar en polares no es simplemente cambiar x por $r\cos\alpha$ e y por $r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, sino que hay que introducir un factor "de corrección" r. La fórmula para integrar en polares en D es entonces

$$\boxed{\iint_D F = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} F(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha)r\, drd\alpha}. \qquad (3)$$

Esta fórmula se aplica, cambiando los límites adecuadamente, a cualquier región que se describa fácilmente en polares. Por ejemplo, si queremos integrar en una corona circular los límites en r serán r_1 y r_2, los radios de la corona; si queremos integrar en la semicircunferencia superior entonces los límites en α irán de 0 a π y otras constantes corresponderán a integrar en un sector circular.

Ejemplo. Vamos a repetir el último ejemplo en que calculábamos el volumen limitado por $F(x,y) = 2 - x + y$ (esto es un plano) y por el circulo unidad C en el plano XY. Según (1), este volumen viene dado por $\iint_C F$ y (3) permite escribir

$$\iint_C F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r\cos\alpha + r \operatorname{sen}\alpha) r \, dr d\alpha.$$

Hemos ganado en que los límites de integración son más sencillos pero todavía hay más, si intercambiamos el orden de integración y usamos que $\int_0^{2\pi} \cos\alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha = 0$ (fácil con un dibujo o por integración directa), los cálculos son inmediatos, a diferencia de lo que ocurría sin usar el cambio a polares:

$$\iint_C F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha) r \, d\alpha dr = \int_0^1 4\pi r \, dr = 2\pi.$$

Uno de los grandes logros matemáticos de la antigua Grecia fue la fórmula πR^2 para el área del círculo de radio R, obtenida por Arquímedes.

Ejemplo. Comprobemos la fórmula πR^2 para el área del círculo D de radio R usando una integral doble. Gracias a (2) y (3) se tiene que el área es

$$\iint_D 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 \, d\alpha = \pi R^2.$$

El cambio a coordenadas polares (3) es posiblemente el más común en la práctica, pero a veces es necesario llevar a cabo otros cambios para evaluar una integral. La situación es la siguiente: Tenemos las coordenadas cartesianas habituales (x,y) y otras nuevas coordenadas (u,v) relacionadas por una aplicación biyectiva $(x,y) = T(u,v)$ (que suponemos con derivadas parciales continuas). Coordenada a coordenada $x = T_1(u,v)$, $y = T_2(u,v)$. Entonces se tiene

$$(4) \quad \boxed{\iint_R F(x,y) \, dxdy = \iint_{R'} F\big(T(u,v)\big) \big| \det JT(u,v) \big| \, dudv} \quad \text{con} \quad JT = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donde R' es la región R en las nuevas coordenadas y $|\det JT|$ es el valor absoluto del determinante de JT. A este determoinante se le llama *determinante jacobiano* en honor al matemático C.G.J. Jacobi de la primera mitad del siglo XIX.

Fuera de algunos casos con bastantes simetrías, suele ser difícil “inventar” cambios adecuados en integrales dobles.

Ejemplo. Calculemos el área de la elipse $E \equiv x^2 + y^2/9 \le 1$ utilizando el cambio de variable $x = r\cos\alpha$, $y = 3r\operatorname{sen}\alpha$ que es una pequeña modificación de las coordenadas polares. Al sustituir se tiene $r^2 \le 1$ y todos los puntos de E se corresponden con valores en los rangos $0 \le r \le 1$, $0 \le \alpha < 2\pi$. El determinante jacobiano de la transformación $T(r,\alpha) = (r\cos\alpha, 3r\operatorname{sen}\alpha)$ es

$$JT(r,\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\operatorname{sen}\alpha \\ 3\operatorname{sen}\alpha & 3r\cos\alpha \end{vmatrix} = 3r\big(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\big) = 3r.$$

Entonces, según (2) y (4), el área buscada es

$$\iint_E 1\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r\ drd\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\ d\alpha = 3\pi.$$

Integrales triples

La teoría de la integración se extiende a más dimensiones pero, como ya hemos mencionado, pocas veces aparecen integrales con más de 3 variables en las aplicaciones. El caso de la *integrales triples* tiene cierta relevancia geométrica (aparte de su interés físico). Para un cuerpo V en el espacio se tiene

$$\boxed{\iiint_V 1\ dxdydz = \text{Volumen de } V.} \tag{5}$$

Del lado físico, si $\rho = \rho(x,y,z)$ es la densidad de un cuerpo V en cada uno de sus puntos, entonces

$$\boxed{\iiint_V \rho(x,y,z)\ dxdydz = \text{Masa de } V.} \tag{6}$$

La base de esta fórmula es que en el límite la densidad es masa entre volumen. Es decir, en un cubito infinitesimal (relamente un ortoedro) de lados dx, dy, dz, se tiene $dM = \rho dxdydz$. Integrar es como sumar todos esos trocitos infinitesimales y por tanto la masa viene dada por (6).

La fórmula (4) se extiende al caso de más variables, en particular a las integrales triples. Las complicaciones de cálculo crecen bastante y sólo mencionaremos aquí que cuando el cambio es a *coordenadas cilíndricas* el determinante jacobiano es r y cuando es a *coordenadas esféricas* es $r^2\operatorname{sen}\beta$. Es decir, se tienen las siguientes fórmulas:

$$\iiint_V F(x,y,z)\ dxdydz \iiint_{V'} F(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, z)\ r\ drd\alpha dz \tag{7}$$

(que no es más que un cambio a polares en las dos primeras variables) y

$$\iiint_V F(x,y,z)\ dxdydz \iiint_{V'} F(r\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, r\cos\beta)\ r^2\operatorname{sen}\beta\ drd\alpha d\beta. \tag{8}$$

El primer cambio es útil para funciones que dependen de x^2+y^2, y el segundo para las que dependen de $x^2+y^2+z^2$. En ambos casos es muy importante que sepamos describir fácilmente V', en otro caso el cambio no será útil.

Ejemplo. El plano $2x + 2y + z = 1$ corta al primer octante (la región $x, y, z \geq 0$) dando lugar a una pirámide triangular P. Vamos a calcular el volumen de P usando integrales por medio de (5). La z variará entre el "suelo" $z = 0$ y el plano que es $z = 1 - 2x - 2y$. Entonces, fijadas x e y en la base B de la pirámide, $0 \leq z \leq 1 - 2x - 2y$ y podemos escribir

$$\iiint_P 1 \, dxdydz = \iint_B \int_0^{1-2x-2y} 1 \, dzdxdy = \iint_B (1 - 2x - 2y) \, dxdy.$$

La base está limitada por los ejes x e y y por el corte del plano con $z = 0$, esto es, la recta $2x + 2y = 1$. Para cada x se tiene por tanto $0 \leq y \leq (1 - 2x)/2$ debemos pedir $0 \leq x \leq 1/2$. Con un dibujo estamos poniendo los límites en una integral doble correspondientes a un triángulo como habíamos visto antes, si uno lo prefiere ver analíticamente, $x \leq 1/2$ viene forzado por $0 \leq (1 - 2x)/2$. Entonces el volumen es

$$\iint_B (1 - 2x - 2y) \, dxdy = \int_0^{1/2} \int_0^{(1-2x)/2} (1 - 2x - 2y) \, dydx = \int_0^{1/2} \frac{(1 - 2x)^2}{4} \, dx.$$

La última integral es elemental, se puede desarrollar e integrar o, más fácilmente, compensar la derivada:

$$\int_0^{1/2} \frac{(1 - 2x)^2}{4} \, dx = -\frac{1}{8} \int_0^{1/2} (-2)(1 - 2x)^2 \, dx = -\frac{1}{24}(1 - 2x)^3 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{24}.$$

Haciendo un dibujo, es fácil ver que la base es un triángulo de base y altura $1/2$, por tanto de área $1/4$. Además la altura de la pirámide es 1 y el resultado cuadra con la concida fórmula $\frac{1}{3}\mathsf{A}_{\mathsf{base}} \cdot \mathsf{altura}$ para el volumen de la pirámide y el cono.

Ejemplo. Calculemos el volumen de la esfera (también debido a Arquímedes) usando una integral triple. La esfera E de radio R se describe en coordenadas esféricas como $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < \pi$. Entonces por (5) y (8), su volumen es

$$\begin{aligned} \iiint_E 1 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^2 \operatorname{sen} \beta \, drd\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{3}R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \beta \, d\alpha d\beta = \frac{2\pi}{3}R^3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \beta \, d\beta = \frac{4\pi}{3}R^3. \end{aligned}$$

Ejemplo. Hallemos la masa de una semiesfera de radio 1 centrada en el origen y apuntando hacia arriba (con $z \geq 0$) de forma que su densidad en cada punto sea igual a la distancia al eje Z. No es difícil ver que la distancia de (x, y, z) a dicho eje es $\sqrt{x^2 + y^2}$ (la misma que la distancia de (x, y) al origen en $\mathbb{R}^2$). Según (6) lo que debemos calcular es

$$I = \iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz \qquad \text{con } S \text{ la semiesfera unidad en } z \geq 0.$$

Uno podría usar esféricas porque S se describe fácilmente en estas coordenadas o también cilíndricas porque así $\sqrt{x^2 + y^2}$ queda sencillo. Para practicar, usaremos las segundas (aunque las primeras son algo más ventajosas). La superficie esférica unidad es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

y por tanto los puntos de S son los que satisfacen $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$ que en cilíndricas es $0 \le z \le \sqrt{1-r^2}$ con $0 \le \alpha < 2\pi$. Por otro lado, $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Entonces

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \cdot r \, dz d\alpha dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sqrt{1-r^2} \, d\alpha dr = 2\pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} \, dr.$$

Esta última integral no es tan fácil (por eso no es tan conveniente el cambio a cilíndricas). Se resuelve con el cambio $r = \operatorname{sen} t$. Con él y las fórmulas trigonométricas $2 \operatorname{sen} t \cos t = \cos(2t)$ y $\operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \cos(2\alpha)/2$ se sigue

$$I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2t) \, dt = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \big(1 - \cos(4t)\big) \, dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

Referencias. En [Bra98, §13] se trata la integración con numerosos ejemplos y se mencionan algunas aplicaciones (como cálculos de centros de masas y momentos de inercia). De los dos ejemplos que se dan allí del cambio de variable, el 13.40 es dudoso por la singularidad de la función. En [LE99, §13] se sigue un esquema similar. En [MT98] la integración en 2 y 3 variables se trata en el capítulo 5, haciéndose hincapié en algunos aspectos teóricos, sobre todo en §5.5, que exceden este curso. El cambio de variable se pospone al capítulo 6.

Referencias

[Bra98] K.J. Bradley, G.L.; Smith. *Cálculo de varias variables.* (Vol.II). Prentice Hall, tercera edition, 1998.

[LE99] R.P. Larson, R.E.; Hostetler and B.H. Edwards. *Cálculo y Geometría Analítica.* (Vol.II). McGraw Hill, sexta edition, 1999.

[MT98] J. Marsden and A. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Pearson/Addison Wesley, cuarta edition, 1998.