Grado en Química
Segundo parcial de Matemáticas 26 de marzo de 2014

Apellidos y Nombre ____________________________

D.N.I. ______________ Firma ______________________

1) Halla los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y$.

2) Halla el volumen limitado entre el paraboloide definido por $z = 16 - 4x^2 - 4y^2$ y el plano $z = 0$.

3) Utiliza el teorema de la divergencia para calcular la integral (flujo) del campo $\vec{F} = (x^3, y^3 + z, y)$ sobre la superficie del cilindro determinado por $x^2 + y^2 \le 1$, $-2 \le z \le 2$, con la normal exterior.

4) Estudia para qué valores del parámetro a el siguiente sistema tiene una solución, ninguna o infinitas:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 7x + 31y + (a^2 + 10)z = a + 6 \end{cases}$$

5) Estudia si $\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (4, 5, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Soluciones

1) Calculamos primero los puntos críticos

$$\nabla f = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 10y + 4x + 4 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (4, -2).$$

Ahora hallamos la matriz hessiana en ese punto

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como $\partial^2 f/\partial x^2 = 2 > 0$ y $|\mathcal{H}f| = 4 > 0$ entonces en $(4, -2)$ se alcanza un mínimo relativo que es $f(4, -2) = -4$. Se puede ver que de hecho es un mínimo global.

2) Como $0 \leq z \leq 16 - 4x^2 - 4y^2$, se tiene $4x^2 + 4y^2 \leq 16$, esto es, $x^2 + y^2 \leq 4$. Al ser el volumen bajo la gráfica de $f(x, y) = 16 - 4x^2 - 4y^2$, tenemos que calcular

$$V = \iint_R (16 - 4x^2 - 4y^2)\, dxdy \qquad \text{con} \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2^2\}.$$

El cambio a polares $x = r \cos \alpha$, $y = r \operatorname{sen} \alpha$, permite deducir

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (16 - 4r^2) r \; dr d\alpha \int_0^{2\pi} (8r^2 - r^4)\Big|_0^2 \; d\alpha = 2\pi(32 - 16) = 32\pi.$$

3) Si C es el cilindro, por el teorema de la divergencia, debemos calcular

$$F = \iiint_C \operatorname{div} \vec{F} \; dxdydz = \iiint_C (3x^2 + 3y^2) \; dxdydz.$$

Pasando a cilíndricas (polares en x e y),

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-2}^2 3r^3 \cdot r \; dz dr d\alpha = 24\pi \int_0^1 r^3 \; dr = 6\pi.$$

4) Después de intercambiar la primera y la segunda ecuaciones, la reducción de Gauss es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 31 & a^2+10 & a+6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -2 \\ 0 & 10 & a^2-4 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right).$$

La última ecuación de la matriz escalonada es $(a^2 - 9)z = a - 3$. Si $a^2 - 9 \neq 0$, podemos despejar z y después las otras variables. Entonces si $a \neq \pm 3$ hay solución única. Si $a = 3$, esta ecuación es $0 = 0$ y hay infintas soluciones (podemos tomar $z = \lambda$) y si $a = -3$, queda $0 = -6$ que implica que no hay soluciones.

5) Para ver si los vectores son linealmente independientes, los ponemos en columna y aplicamos reducción de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como hay infinitas soluciones, son linealmente dependientes y no forman una base.