GRADO EN QUÍMICA

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICAS — 1 DE ABRIL DE 2014

APELLIDOS Y NOMBRE ____

D.N.I. ________________ FIRMA ________________________________

1) Calcula el plano tangente a la gráfica de $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) + e^{x+2y}$ en el punto $(0,0)$.

2) Halla la integral doble de la función $f(x,y) = 6x + 6y$ sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

3) Calcula la integral (flujo) del campo $\vec{F} = (zy, -zx, 1)$ sobre la superficie del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z > 0$ donde la normal se escoge con la tercera coordenada positiva.

4) Estudia para qué valores de los parámetros a y b el siguiente sistema tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ 4x + ay + (a+2)z = b \end{cases}$$

5) Calcula una base del subespacio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + 3z = 0\}$.

$\boxed{\text{SOLUCIONES}}$

1) El plano tangente se consigue igualando a z el polinomio de Taylor de orden 1. Calculamos entonces las derivadas parciales primeras

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y) + e^{x+2y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y) + 2e^{x+2y},$$

que sustituidas en $(0,0)$ dan respectivamente 2 y 3. Por otra parte, $f(0,0) = 1$, entonces el plano buscado es $z = 1 + 2x + 3y$.

2) En este triángulo la x varía entre 0 y 1, y para cada x fijada, la y varía entre 0 y x, por tanto la integral es

$$\int_0^1 \int_0^x (6x + 6y)\, dydx = \int_0^1 \left(6x^2 + 3x^2\right) dx = 3x^3\Big|_0^1 = 3.$$

3) Se puede parametrizar la superficie indicada con $\Phi(r,\alpha)=(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha, 1-r^2)$, usando coordenadas polares, donde $0\le\alpha<2\pi$ y $0<r<1$ porque para $z>0$ se tiene $x^2+y^2<1$. La normal es:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha & -2r\\ -r\,\mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha & 0\end{vmatrix}=\big(2r^2\cos\alpha, 2r^2\,\mathrm{sen}\,\alpha, r\big),$$

y como la tercera coordenada es positiva no hay que cambiar de signo. Sustituyendo la parametrización, $\vec{F}\big(\Phi(r,\alpha)\big)$ es $\big((r-r^3)\,\mathrm{sen}\,\alpha, (r^3-r)\cos\alpha, 1\big)$. Entonces

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,drd\alpha=\pi.$$

4) Aplicando reducción de Gauss después de intercambiar la primera y segunda ecuación,

$$\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&1&-1&1\\4&a&a+2&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-7&-1\\0&a-4&a-10&b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-7&-1\\0&0&-6a+18&b-a\end{pmatrix}.$$

Para que haya infinitas soluciones la última ecuación debe ser $0=0$ (para que z se pueda escoger como un parámetro) y esto equivale a que $a=b=3$.

5) Al resolver la ecuación que define el subespacio se tiene $y=\lambda$, $z=\mu$ y consecuentemente $x=-2\lambda-3\mu$. Entonces cada vector del subespacio es de la forma

$$(-2\lambda-3\mu,\lambda,\mu)=\lambda(-2,1,0)+\mu(-3,0,1).$$

Los vectores $(-2,1,0)$ y $(-3,0,1)$ forman una base porque todos los vectores del subespacio son combinación lineal de ellos y porque son linealmente independientes (por la construcción o porque uno no es múltiplo de otro).