Grado en Química
Convocatoria ordinaria de Matemáticas 14 de mayo de 2014

$\boxed{\text{Enunciados}}$

1) (`3 puntos`) Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}\,.$$

a) Halla las asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de la función $y = f(x)$, asi como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Halla justificadamente los extremos relativos de la función $y = f(x)$.
c) Calcula

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$$

2) (`2 puntos`)
a) La temperatura en un punto (x, y) de una placa viene dada por:

$$T(x, y) = 10 + x + 2x^2 + y^4$$

Si un insecto se encuentra en el punto $P(2, 1)$, ¿en qué dirección se debe mover para enfriarse lo más rápidamente posible? ¿Cuál es la tasa de variación de la temperatura a lo largo de esa dirección?
b) La ecuación de estado de un cierto líquido se puede escribir en la forma:

$$V(T, P) = a + bT - cTP + de^{-kP}$$

donde a, b, c, d, k son constantes características del líquido. Encuentra las expresiones de las derivadas parciales $\dfrac{\partial P}{\partial V}$, $\dfrac{\partial P}{\partial T}$

3) (`2 puntos`)
a) Halla la integral doble de la función $f(x, y) = 3x + 6y$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.
b) Calcula la integral del campo $\vec{F} = (x - y - 1, x + y)$ desde el punto $P = (1, 0)$ al punto $Q = (-1, 0)$ a lo largo de parte superior de la circunferencia unidad.

4) (`3 puntos`)
a) Calcula los autovalores y un autovector correspondiente al autovalor más pequeño de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Para qué valor o valores de a el conjunto de vectores: $\{(1, 1, 1), (1, a, 0), (1, 0, 0)\}$, forma una base de $\mathbb{R}^3$.
c) Resuelve la ecuación diferencial: $y'' - 2y' + y = 0$, con la condición: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

$\boxed{\text{SOLUCIONES}}$

1) a) Para las asíntotas verticales debemos estudiar cuándo $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Al ser $f(x)$ una fracción algebraica, basta imponer que el denominador sea nulo: $x^2 - 4 = 0$. Por tanto, las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

Las horizontales requieren calcular

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$$

y se sigue que la asíntota horizontal es $y = 0$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se estudian con la derivada $f'(x) = -2x/(x^2-4)^2$. El numerador cambia de signo en $x = 0$ y el denominador es siempre positivo. Se tiene entonces que f es decreciente en $\mathbb{R}^+ - \{2\}$ porque la derivada es negativa allí y creciente en $\mathbb{R}^- - \{-2\}$, porque es positiva. Se han suprimido 2 y -2 porque f no está definida para estos valores de x. Con intervalos esto se escribe como

$$\text{decreciente en } (0,2)\cup(2,+\infty) \qquad \text{y} \qquad \text{creciente en } (-\infty,-2)\cup(-2,0).$$

b) En un extremos relativo debe haber un cambio en el crecimiento. Entonces el único extremo relativo se alcanza en $x = 0$ y corresponde al máximo relativo $f(0) = -1/4$ de la función, pues se pasa de decreciente a creciente.

c) Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \qquad \Rightarrow \qquad A(x-2) + B(x+2) = 1.$$

Igualando coeficientes o dando valores $x = \pm 2$, se tiene $-A = B = 1/4$, entonces

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = -\frac{1}{4}\int_3^4 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int_3^4 \frac{dx}{x-2} = \Big(-\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2|\Big)\Big|_3^4 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

En el último paso se ha usado la propiedad de los logaritmos $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$.

2) a) El gradiente da la dirección de máximo crecimiento y su negativo la de máximo decrecimiento. El gradiente es $\nabla T = (1+4x, 4y^3)$ y al particularizar en el punto $(x,y) = (2,1)$ y cambiar el signo, se obtiene que la dirección buscada es $(-9,-4)$. La tasa de variación es la derivada direccional a lo largo del vector unitario $\vec{u}$ con la dirección de $-\nabla T$, por tanto es $-\nabla T\cdot\nabla T/|\nabla T| = -|\nabla T| = -\sqrt{97}$. El signo negativo sólo indica que hay decrecimiento

b) Para que estas parciales tengan sentido estamos suponiendo la ecuación

$$V = a + bT - cTP + de^{-kP} \qquad \text{con } P = P(V,T).$$

Derivando esta ecuación con respecto a V se tiene

$$1 = -cT\frac{\partial P}{\partial V} - dke^{-kP}\frac{\partial P}{\partial V} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-1}{cT + dke^{-kP}}.$$

De la misma forma, derivando con respecto a T se tiene

$$0 = b - cP - cT\frac{\partial P}{\partial T} - dke^{-kP}\frac{\partial P}{\partial T} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{b - cP}{cT + dke^{-kP}}.$$

3) a) Este triángulo T está bajo la gráfica de $y = x$, con $x \in [0,1]$, por tanto puede describirse como $0 \le y \le x \le 1$. Por tanto

$$\iint_T f = \int_0^1 \int_0^x (3x + 6y)\, dydx = \int_0^1 \big(3xy + 3y^2\big)\Big|_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 6x^2\, dx = 2x^3\big|_0^1 = 2.$$

b) La parametrización más natural es $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $0 \le t \le \pi$. Según la definición de la integral de línea, tenemos que calcular

$$\int_0^\pi \vec{F}\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_0^\pi \big(\cos t - \operatorname{sen} t - 1, \cos t + \operatorname{sen} t\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t, \cos t\big)\, dt.$$

Operando, el resultado es:

$$\int_0^\pi \big(-\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 + \operatorname{sen} t + \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos t\big)\, dt = \int_0^\pi (1 + \operatorname{sen} t)\, dt = \pi + 2.$$

4) a) Para simplificar el cálculo de $|A - \lambda I|$, hacemos unas manipulaciones previas:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & -4 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Con esto, o con un cálculo directo, se sigue

$$|A - \lambda I| = \big(\lambda^2 - 1 - 3 + 4(1-\lambda)\big)(2-\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda - 4).$$

Así pues, los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. el menor es $\lambda_1 = 0$ y para hallar un autovector hay que buscar una solución no nula de $A\vec{v} = \vec{0}$. Por reducción de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todas las soluciones son de la forma $(\mu, \mu, -\mu)$. Un autovector válido es $(1, 1, -1)$.

b) Son tres vectores en $\mathbb{R}^3$, que tiene dimensión 3, por tanto basta ver si son linealmente independientes. Para ello los ponemos en columna y aplicamos reducción de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

El sistema correspondientes tiene infinitas soluciones si y sólo si $a = 0$, por tanto son linealmente dependientes y no forman una base exactamente en este caso. Son base cuando $a \neq 0$.

c) La ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ que tiene una raíz doble $\lambda = 1$. Esto significa que e^x y xe^x son soluciones. La solución general es una combinación lineal de ellas $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$, entonces

$$y(x) = \big(C_1 + C_2x\big)e^x \qquad \text{y} \qquad y'(x) = C_2e^x + \big(C_1 + C_2x\big)e^x.$$

Al imponer $y(0) = 1$ se sigue $C_1 = 1$ y al imponer $y'(0) = 2$, se sigue $C_2 + C_1 = 2$. En definitiva, la solución buscada es $y(x) = (1 + x)e^x$.