1. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

- $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
- $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
- $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \ : \ x_1 = 1\}$.
- $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$.
- $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = t, \ x_2 = t, \ x_3 = 2t, \ x_4 = 5t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}\}$.

2. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

1. ¿Se pueden expresar los vectores $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ como combinación lineal del sistema $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$?
2. Calcular x e y, si es posible, para que el vector $(5, 7, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.

3. Estudiar si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

- $S = \{(1, 2, 3, 0), (4, 3, 4, -16), (7, 3, 4, 5)\}$.
- $S = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, -1)\}$.

4. Determina si son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$, y da una base del subespacio vectorial que generan:

$$\vec{u_1} = (1, 3, 0, -4) \ , \ \vec{u_2} = (-1, -5, 2, 6) \ , \ \vec{u_3} = (1, -2, 5, 1) \ .$$

5. Da una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 3y \qquad - 4t & = 0 \\ x + 5y - 2z - 6t & = 0 \\ x - 2y + 5z + t & = 0 \end{array} \right.$$

Calcula el rango de la matriz del sistema y la dimensión del subespacio que generan.

6. Estudia si las siguientes matrices son linealmente independientes en el espacio de matrices 2×2 con coeficientes reales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. ¿Para qué valores de λ son los vectores $(\lambda, 1, 1)$, $(1, \lambda, 1)$, $(1, 1, \lambda)$ una base de $\mathbb{R}^3$?

8. Comprueba que $\{(1, 0, 1), (2, -2, 1), (3, 1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y halla las coordenadas de $(-1, -2, 0)$.

9. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ formado por los polinomios (de coeficientes reales) de grado menor o igual que tres. Explica por qué $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base y por qué $\{1 + x^3, 1 + x + x^2, 1 - x^2 + x^3, 1 + x^2 + x^3\}$ no lo es.

10. Estudia si los dos conjuntos siguientes son subespacios del espacio $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ del ejercicio anterior:

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \,:\, x - 1 \text{ divide } p(x)\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \,:\, p(2) = 0\}.$$

11. Encuentra la matriz respecto a las bases canónicas de cada una de las siguientes aplicaciones lineales y halla su núcleo.

- $g_1 \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.
- $g_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $g_2(1, 0) = (0, 0)$ y $g_2(2, 1) = (1, 1)$.

12. Respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$, halla las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

1. Giro de α grados respecto del eje z.
2. Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.
3. Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.
4. Proyección sobre el plano $x = 0$.
5. Simetría con respecto al plano $y = 0$.

13. Estudia si las siguientes matrices son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ y, en ese caso, halla una base de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 45 \\ 0 & -6 & -16 \end{pmatrix}.$$

14. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal f dada por $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$; $f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (0,1,0), \vec{e}_2 = (-1,0,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$.

1. Calcula las matrices de f en la base $\mathcal{B}$ y en la base canónica.
2. Busca una base de vectores en la que la aplicación f tenga una matriz diagonal.

15. Encuentra los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

16. Sea f una aplicación lineal en $\mathbb{R}^3$ definida en la base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ por $f(\vec{e}_1) = (\alpha+1)\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = (\alpha+\beta)\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 + (\alpha-1)\vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = \beta\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Determina los autovalores o valores propios de f comprobando que no dependen ni de α ni de β.
2. Calcula el valor de α para el que la aplicación f es diagonalizable. Halla en estas condiciones una base formada por vectores propios.