Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 2.5

1. Calcula la divergencia y el rotacional de los siguientes campos:
a) $\vec{F}_1(x, y, z) = \big(xy, y^2 - x^2, yz\big)$.
b) $\vec{F}_2(x, y, z) = \big(yz\cos(xy), xz\cos(xy) + e^{y^2}, \operatorname{sen}(xy)\big)$.
c) $\vec{F}_3(x, y, z) = \|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}$ con $\vec{r} = (x, y, z)$.

2. Demostrar que el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)(a, b, c)$, donde $f(x, y, z)$ y (a, b, c) son una función escalar y un vector de $\mathbb{R}^3$ cualesquiera, es ortogonal a su rotacional.

3. Comprueba que el campo $\vec{F}(x, y, z) = \big(y + z\cos(xz), x, 2z + x\cos(xz)\big)$ tiene rotacional nulo y encuentra un potencial, es decir, una función $f = f(x, y, z)$ tal que se verifica $\nabla f = \vec{F}$.

4. Calcula la integral $\int_C xy\, ds$, donde C es el segmento rectilíneo que une los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (2, 2)$.

5. Calcula la integral $\int_C y\, ds$,
a) cuando C es el segmento rectilíneo que une los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 1)$.
b) cuando C es el arco de la curva $y = \sqrt{x}$ que une los mismos puntos A y B.

6. Calcula la integral del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 2, 4z)$ a lo largo de la curva definida como $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿Qué forma tiene esta curva?

7. Calcula la integral del campo $\vec{F}(x, y) = (3x^2 + 4xy, 5xy)$ a lo largo del arco de la parábola $y = x^2$ que va desde $(-2, 4)$ hasta $(0, 0)$.

8. Calcula la integral del campo $\vec{F}(x, y) = (x, xy)$ a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ recorrido en sentido positivo (antihorario).

9. Calcula la integral de línea $\int_C \big(-y\, dx + xy\, dy\big)$ a lo largo del arco de la circunferencia unidad que va del punto $A = (0, 1)$ al $B = (1, 0)$.

10. Calcula la integral $\int_C (y\, dx + x\, dy)$ a lo largo del segmento de curva: $\sigma(t) = \big(t^4/4, \sin^3(\pi t/2)\big)$, $t \in [0, 1]$. *Indicación:* El campo es conservativo.

11. Calcula el vector normal a:
a) un cono dado por la parametrización: $\vec{\Phi}(t, u) = (1 + u\cos t, 1 + u\operatorname{sen} t, u)$. ¿Qué ocurre en el vértice?
b) el paraboloide descrito por el grafo: $z = x^2 + y^2$.

12. Calcula la integral $\int_S z\, dS$, donde S es la semiesfera superior de radio R:
a) parametrizando S en coordenadas cilíndricas.
b) describiendo S mediante un grafo $z = g(x, y)$

13. Calcula la integral $\int_S x\, dS$, donde S es el triángulo de vértices: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

14. Calcula la integral del campo constante $(0, 1, 1)$ en la superficie parametrizada por $x = r\cos\alpha$, $y = r \operatorname{sen}\alpha$, $z = r^2$ con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. ¿Qué forma tiene esta superficie?

15. Halla el flujo (la integral de superficie) con la normal exterior del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ a través de la superficie del cilindro sólido $C = \big\{(x, y, z) \;:\; x^2 + y^2 \leq r_0^2,\ -h_0 \leq z < h_0\big\}$ con r_0 y h_0 constantes positivas.

16. Calcula el flujo con la normal exterior del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ en la esfera unidad utilizando el teorema de la divergencia.

17. Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ y la semiesfera unidad S en $z \geq 0$ con la normal apuntando hacia arriba. Calcula la integral de superficie del rotacional de $\vec{F}$ sobre S directamente, sin usar el teorema de Stokes y comprueba después que el resultado es igual a la integral de línea que aparece en este teorema.

18. Utilizando el teorema de Green, integra el campo $\vec{F}(x, y) = (y^2 - \tan x, 3x + \operatorname{sen} y)$ a lo largo de la frontera de la región comprendida entre la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$, recorrida en sentido antihorario.