Matemáticas
Convocatoria Extraordinaria. 24 de junio de 2014

1. (`3 puntos`) **a)** Estudia el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+kx}}{1-\cos x}$$

en función del valor del parámetro real k.

b) Halla los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad, así como los extremos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x - 2\,\mathrm{sen}\, x\ ,\ 0 \leq x \leq 2\pi$$

c) Resuelve la integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

---

2. (`2 puntos`) **a)** El beneficio en euros obtenido al producir x unidades de un producto A e y unidades de un producto B viene dado aproximadamente por el modelo

$$B(x,y) = 9x + 6y - 0,01(x^2 + xy + y^2)\,.$$

Determina cuantas unidades de cada producto se deben producir para obtener el máximo beneficio.

b) La temperatura en grados centígrados en un punto (x,y) de una lámina metálica es

$$T(x,y) = 200e^{-(x^2+y^2)/2}\,, \qquad -1 \leq x \leq 1\ \ ,\ \ -1 \leq y \leq 1\,.$$

Halla la curva del plano (x,y) en cuyos puntos la temperatura es constante e igual a 100ºC, indicando el tipo de curva que resulta.

---

3. (`2 puntos`)

a) Calcula la integral del campo $\vec{F} = (\cos z, \cos^2(\pi y), y)$ a lo largo del camino $\vec{c}(t) = (1, t, e^t)$ desde el punto $P = (1, 0, 1)$ al $Q = (1, 2, e^2)$.

b) Utilizando el teorema de Gauss calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie esférica unidad centrada en el origen.

---

4. (`3 puntos`)

a) Estudia para qué valores del parámetro a el siguiente sistema tiene una solución, ninguna o infinitas:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + 3y + 3z = 7 \\ 2x + 4y + (a^2 + 1)z = 5a + 1 \end{cases}$$

b) Calcula una base del subespacio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y - 4z = 0\}$.

c) Resuelve la ecuación diferencial:

$$y' - y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2},$$

con la condición: $y(1) = 2$.

$\boxed{\text{Soluciones}}$

1.a) La indeterminación es del tipo 0/0. Aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+kx}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{k}{2}(1+kx)^{-1/2}}{\operatorname{sen} x}.$$

El numerador y el denominador tienden a $1-k/2$ y a 0, respectivamente. Si $k \neq 2$, el resultado es ∞ y si $k=2$, aplicamos la regla de l'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+2x)^{-1/2}}{\operatorname{sen} x}. = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{2}\cdot 2(1+2x)^{-3/2}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

1.b) Se tiene $f'(x) = 1 - 2\cos x$. Sus raíces en $(0, 2\pi)$ son $\pi/3$ y $2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$, que corresponden a $60°$ y a $300°$. La derivada es negativa en $(0,\pi/3)$ y $(5\pi/3, 2\pi)$ y positiva en $(\pi/3, 5\pi/3)$. Por otro lado, $f''(x) = 2\operatorname{sen} x$ que es positiva en $(0,\pi)$ y negativa en $(\pi, 2\pi)$. Así pues, la función es:

Decreciente en $(0,\pi/3)$ y $(5\pi/3, 2\pi)$,	Creciente en $(\pi/3, 5\pi/3)$,
Alcanza un mínimo, $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$, en $x = \frac{\pi}{3}$,	Alcanza un máximo, $\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$, en $x = \frac{5\pi}{3}$,
Convexa (cóncava hacia arriba) en $(0,\pi)$,	Cóncava (cóncava hacia abajo) en $(\pi, 2\pi)$,

Además tiene un punto de inflexión en $\big(\pi, f(\pi)\big) = (\pi, \pi)$.
Los extremos son no sólo locales sino también absolutos, porque los valores de f en el borde del intervalo, $f(0)$ y $f(2\pi)$, están entre $f(\pi/3)$ y $f(5\pi/3)$.

1.c) Utilizamos integración por partes con $u = \ln x$ y $dv = x^{-1/2}dx$. Entonces

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \Big(2x^{1/2}\ln x\Big|_a^1 - \int_a^1 2x^{1/2}\cdot \frac{1}{x}\, dx \Big).$$

En el primer sumando tenemos que calcular

$$\lim_{a\to 0^+} 2a^{1/2}\ln a = \lim_{a\to 0^+} \frac{2\ln a}{a^{-1/2}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{2/a}{-a^{-3/2}/2} = 0,$$

donde se ha usado la regla de l'Hôpital. En el segundo sumando basta emplear que $4x^{1/2}$ es una primitiva de $2x^{-1/2}$. Recordando que $\ln 1 = 0$, se concluye

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = 0 - 0 - \lim_{a\to 0^+} (4 - 4a^{1/2}) = -4.$$

2.a) Calculamos primero los puntos críticos

$$\nabla B = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9 - 0{,}02x - 0{,}01y \\ 6 - 0{,}01x - 0{,}02y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (400, 100).$$

Ahora nos aseguramos que ahí se alcanza un máximo examinando la matriz hessiana en el punto

$$\mathcal{H}B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}02 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & -0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Como $\partial^2 B/\partial x^2 < 0$ y $|\mathcal{H}B| > 0$ entonces en $(400, 100)$ se alcanza un máximo relativo. Al representar B un paraboloide, es de hecho es un mínimo global. Entonces las cantidades de producto son $x = 400$ e $y = 100$.

2.b) La curva $T = 100$ es $1/2 = e^{-(x^2+y^2)/2}$ que tomando logaritmos se escribe como $-\ln 2 = -(x^2 + y^2)/2$, o lo que es lo mismo, $x^2 + y^2 = \ln 4$. Esto es una circunferencia de radio $\sqrt{\ln 4}$, que al intersecarla con el cuadrado $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, da lugar a cuatro arcos.

3.a) Para ir de P a Q, t debe variar de 0 a 2, entonces de acuerdo con la definición de integral de línea lo que hay que calcular es:

$$\int_0^2 \vec{F}\big(\vec{c}(t)\big) \cdot \vec{c}\,'(t)\, dt = \int_0^2 \big(\cos e^t, \cos^2(\pi t), t\big) \cdot (0, 1, e^t)\, dt = \int_0^2 \big(\cos^2(\pi t) + te^t\big)\, dt.$$

La primera integral se hace con la fórmula $\cos^2\alpha = \big(1 + \cos(2\alpha)\big)/2$:

$$\int_0^2 \cos^2(\pi t)\, dt = \int_0^2 \frac{1 + \cos(2\pi t)}{2}\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi t)}{4\pi}\Big|_0^2 = 1.$$

La segunda se resuelve integrando por partes:

$$\int_0^2 te^t\, dt = te^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t\, dt = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1.$$

En definitiva, el resultado de la integral del campo es $e^2 + 2$.

3.b) Llamemos B a la esfera sólida centrada de radio 1. Por el teorema de la divergencia (de Gauss), el flujo es

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \iiint_B 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

Pasando a coordenadas esféricas, se llega a una integral iterada sencilla

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\beta\, drd\beta d\alpha = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5},$$

donde $r^2 \operatorname{sen}\beta$ es el jacobiano del cambio a esféricas.

4.a) Aplicando reducción de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & a^2+1 & 5a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a^2-3 & 5a-7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 5a-10 \end{array}\right).$$

La última ecuación de la matriz escalonada es $(a^2-4)z = 5a-10$. Si $a^2-4 \neq 0$, podemos despejar z y después las otras variables. Entonces si $a \neq \pm 2$ hay solución única. Si $a = 2$, esta ecuación es $0 = 0$ y hay infinitas soluciones (podemos tomar $z = \lambda$) y si $a = -2$, queda $0 = -20$ que implica que no hay soluciones.

4.b) Para hallar una base resolvemos la ecuación. Podemos elegir y y z como parámetros arbitrarios, digamos $y = \lambda$, $z = \mu$, de esta forma, todos los elementos del subespacio son

$$(x, y, z) = (\lambda + 4\mu, \lambda, \mu) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(4, 0, 1).$$

Es decir, todos son combinación lineal de $(1, 1, 0)$ y $(4, 0, 1)$ que son linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro). Entonces $\big\{(1, 1, 0), (4, 0, 1)\big\}$ es una base.

4.c) Consideramos primero la solución de la ecuación homogénea $y' - y = 0$ que es $y_h = Ae^x$. Ahora buscamos una solución particular de la forma $y_p = ax^2 + bx + c$. Al sustituir en la ecuación e igualar coeficientes, se obtiene

$$-a = \frac{1}{2}, \qquad 2a - b = 0, \qquad b - c = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = -\frac{1}{2}.$$

Entonces la solución general de la ecuación es

$$y(x) = Ae^x - \frac{1}{2}\big(x^2 + 2x + 1\big) = Ae^x - \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Al imponer $y(1) = 2$ se sigue $A = 4e^{-1}$ y la solución buscada es $y(x) = 4e^{x-1} - (x+1)^2/2$.