Soluciones a algunos problemas de la hoja 2.2

- **Problema 1**
Como $P(T,v) = n\frac{RT}{V}$,
$$\frac{\partial P}{\partial t} = n\frac{R}{V}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = -n\frac{RT}{V^2}.$$

- **Problema 2**
Se cumplen $p(V,T) = \frac{nRT}{V}$, $T(V,p) = \frac{pV}{nR}$ y $V(T,p) = \frac{nRt}{p}$; por tanto,
$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{p}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{nR}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -n\frac{RT}{V^2}$$

Multiplicando las tres expresiones,
$$\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{nR}{p}\cdot\frac{V}{nR}\cdot\left(-n\frac{RT}{V^2}\right) = -\frac{nRT}{pV}.$$

Y, como se trata de un gas ideal, pV vale lo mismo que nRT por el Problema 1. Por tanto, la última cantidad es -1.

- **Problema 3** (Primer apartado) Para un gas ideal, utilizando el Problema 2,
$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{nR}{p}, \qquad \beta = -\frac{1}{V}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) = \alpha\frac{T}{p}.$$

- **Problema 4** En el primer apartado, al derivar dos veces sobre x o y, queda cero. En el segundo, al derivar dos veces sobre x queda $e^x \operatorname{sen} y$ y, sobre y, $-e^x \cos y$.

Para el tercer apartado, $z(x,y) = \arctan(y/x)$, por tanto,
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1/x}{x^2+y^2}.$$

Y entonces,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-y)\frac{-2x}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{-2y}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{x^2+y^2}.$$

Para el último apartado, como $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ y $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sh} y \operatorname{sen} x = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

- **Problema 5** (Sólo el primer apartado)
$$z(x,t) = \operatorname{sen}(x-ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -c^2\operatorname{sen}(x-ct), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x-ct).$$

- **Problema 6** (Sólo el primer apartado)

$$z(x,t) = e^{-t}\cos(x/c) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t}\cos(x/c), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^{-t}\cos(x/c)\frac{1}{c^2}.$$

- **Problema 8** La función z se escribe en función de x e y, que a su vez dependen de t:

$$z\left(x(t), y(t)\right) = \sqrt{\left(x(t)\right)^2 + \left(y(t)\right)^2} = \sqrt{\cos^2 t + e^{2t}}.$$

Hay dos formas de calcular la derivada dz/dt. Una es directamente, derivando la última expresión:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{cos^2 t + e^{2t}}}\left(-2\cos t \operatorname{sen} t + 2e^{2t}\right) = \frac{-\cos t \operatorname{sen} t + e^{2t}}{\sqrt{cos^2 t + e^{2t}}}.$$

La otra es indirectamente, calculando las parciales de z sobre x e y y las de x e y sobre t:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(-\operatorname{sen} t) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(e^t\right) = \frac{-\cos t \operatorname{sen} t + e^{2t}}{\sqrt{cos^2 t + e^{2t}}}.$$

En ambas expresiones se puede calcular el valor de dz/dt (que, recordemos, es una función de t) en $t = 0$. Ese valor es $1/\sqrt{2}$.

- **Problema 11** En primer lugar, calculamos el gradiente de h,

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(\tan y, \frac{x}{\cos^2 y}\right).$$

La dirección en que la derivada direccional de h es mayor en P es precisamente la que indica la función gradiente en ese punto, $\nabla h(2, \pi/4) = (\tan(\pi/4), 2/(\sqrt{2}/2)^2) = (1, 4)$.

- **Problema 12** La distancia del punto $(5,0,0)$ a la superficie a un punto cualquiera (x,y,z) es $\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2}$. Para imponer que sea además un punto de la superficie, tomamos $z = x^2 + y^2$. Para quitar la raíz, podemos trabajar con el cuadrado de la distancia sin ningún problema, y por tanto queremos minimizar la función $f(x,y) = (x-5)^2 + y^2 + (x^2+y^2)^2$. Su gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(2x - 10 + 4x(x^2+y^2), 2y + 4y(x^2+y^2)\right) \\ &= \left(4x(x^2+y^2+1/2) - 10, 4y(x^2+y^2+1/2)\right). \end{aligned}$$

La segunda coordenada se anulará únicamente cuando $y = 0$, por tanto, imponemos $y = 0$ en la primera coordenada y queda $4x(x^2 + 1/2) = 10$, o equivalentemente, $2x^3 + x = 5$. Esta ecuación tiene una sola solución real, comprendida entre 1 y 2, que vale aproximadamente $1'2348$ (es muy difícil de resolver a mano).

- **Problema 14** El gradiente de T es $\nabla T(x,y) = \left(-400xe^{-(x^2+y)/2}, -200e^{-(x^2+y)/2}\right)$. De nuevo, la dirección en la que la derivada direccional crece más es la dada por el gradiente,

$$\nabla T(3,5) = (-1200e^{-8}, -200e^{-8}) = (-0'4025, -0'0671).$$

Para ver en qué direcciones se mantiene constante la temperatura, tomamos un vector (a,b) y calculamos $T(3+a, 5+b) = 400e^{-\left[(3+a)^2+(5+b)\right]/2}$. La temperatura se mantendrá estable si $(3+a)^2 + (5+b) = 3^2 + 5 = 16$. Por tanto, hay que imponer $6a + a^2 + b = 0$, de donde $b = -a(a+6)$. Es decir, las direcciones en las que la temperatura se mantendrá constante son las de la forma $(\lambda, -\lambda(\lambda+6))$, para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.