Observaciones. Estas tareas son totalmente voluntarias y servirán para subir la calificación una cantidad no especificada. Son difíciles y por tanto pueden puntuar los ataques sensatos incluso si no resuelven la cuestión planteada completamente. El trabajo debe ser individual y entregarse a lo más el último día de clase.

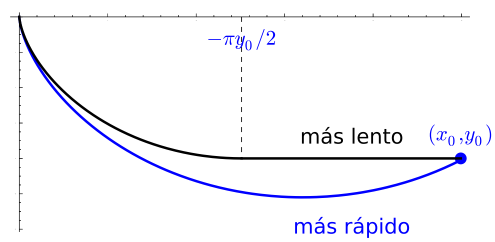
Motivación de la primera tarea. Cuando se aplica el cálculo de variaciones para hallar la *braquistocrona* (el tobogán más rápido) que conecta $(0,0)$ con (x_0, y_0) donde $y_0 < 0 < x_0$, se obtiene un arco de cicloide de la forma $x(u) = K(u - \operatorname{sen} u)$, $y(u) = K(\cos u - 1)$. En la deducción se emplea implícitamente $dy/dx \neq 0$, lo cual se deja de cumplir en un punto si $x_0 > -\pi y_0/2$. En principio podría haber minimizantes para los cuales dy/dx se anula en un intervalo.

1) En el caso $x_0 > -\pi y_0/2$, prueba que la braquistocrona es más rápida que la curva derivable dada por un arco de cicloide (como el anterior) para $x < -\pi y_0/2$ y por la recta horizontal para $-\pi y_0/2 < x \leq x_0$.

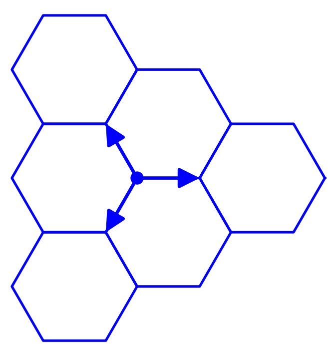
Motivación de la segunda tarea. En un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$, tirando una moneda para decidir si vamos a la derecha o a la izquierda, la mitad del tiempo deberíamos estar en los positivos y la mitad en los negativos. Por tanto el número esperado de retornos al origen es infinito. El problema 15 de la Hoja 2 prueba que esto también se cumple en $\mathbb{Z}^2$ siguiendo las direcciones norte, sur, este y oeste al azar.

2) Estudia qué ocurre si el paseo aleatorio bidimensional se hace en una malla hexagonal. En este caso, en cada posición hay tres direcciones posibles en lugar de cuatro.

Dibujos. Las siguientes figuras pueden servir de ayuda para entender lo que se pide en cada tarea.



Primera tarea



Segunda tarea