Soluciones 11-15 de la Hoja 2

11) Numerando los estados con el orden en que aparecen en el enunciado, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ O & I \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y O, I las matrices nula e identidad, 3×4 y 3×3, respectivamente.

Solución difícil con lo visto en clase. Es muy sencillo ver por inducción que

$$P^n = \begin{pmatrix} A^n & (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})B \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Tomemos $(\pi_0) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 0, 0, 0)$. La probabilidad de que partiendo con igual probabilidad de uno de los primero cuatro estados, lleguemos a cada configuración ganadora después de las dos primeras tiradas en exactamente n pasos (no haber ganado en $n-1$) viene dada por las tres últimas coordenadas de $(\pi_0)P^n - (\pi_0)P^{n-1}$. que es lo mismo que $(\widetilde{\pi}_0)A^{n-1}B$ con $(\widetilde{\pi}_0) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Entonces la probabilidad de cada configuración ganadora es:

$$(\widetilde{\pi}_0) \sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1}B = (\widetilde{\pi}_0)(I - A)^{-1}B = \big(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\big),$$

donde se ha usado que $(I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1}$ (para probarlo, sin entrar en cuestiones de convergencia, basta multiplicar por $I - A$ ambos miembros). Entonces la primera configuración ganadora es más probable.

Según lo dicho, la probabilidad de ganar (con cualquier configuración) en $2 + n$ tiradas, $n \geq 1$, es $(\widetilde{\pi}_0)A^{n-1}B\vec{1}$, donde $\vec{1}$ es el vector columna con tres unos. Entonces el tiempo medio es

$$\overline{T} = 2 + (\widetilde{\pi}_0) \sum_{n=1}^{\infty} nA^{n-1}B\vec{1} = 2 + (\widetilde{\pi}_0)(I - A)^{-2}B\vec{1} = \frac{31}{6},$$

donde esta vez se ha usado que $(I - A)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} nA^n$, que se puede deducir derivando $(I - Ax)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x^n$, que conocíamos de antes.

Solución fácil con mucho ingenio (de la primera parte). Sea M la matriz cuyos elementos son $m_{ij} = \text{Prob}(\text{ganar con } j + 4 | X_0 = i)$, es decir, cuya fila i-ésima es la probabilidad de cada configuración ganadora cuando se parte del estado i. Claramente la solución de la primer parte es $(\widetilde{\pi}_0)M$. Descomponiendo m_{ij} en la probabilidad de ganar en un paso o en más de uno, se sigue

$$m_{ij} = \text{Prob}(X_1 = j+4|X_0 = i) + \sum_{k=1}^{4} \text{Prob}(X_1 = k|X_0 = i)\text{Prob}(\text{ganar con } j+4|X_1 = k)$$

que se escribe en forma matricial como $M = B + AM$. Así pues $(\widetilde{\pi}_0)M = (\widetilde{\pi}_0)(I-A)^{-1}B$.

Se deja como ejercicio, diseñar un método similar para la segunda parte.

12) Consideremos los estados correspondientes a los vértices de un octógono y la cadena de Markov en que hay probabilidad $1/2$ de moverse en sentido positivo y $1/2$ de quedarse en el mismo lugar. Está claro que en exactamente 7 pasos se puede ir de un vértice a cualquier otro pero en 6 no es posible. Entonces P^6 tiene elementos nulos y P^7 no los tiene.

13) Digamos que la distribución estacionaria es $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Según lo que dice el enunciado, debemos hallar los x_n que resuelven el "sistema lineal infinito"

$$\begin{cases} 0.4x_j + 0.6x_{j+2} = x_{j+1} & \forall j \ge 1 \\ 0.5x_0 + 0.6x_2 = x_1 & \\ 0.6(x_1 + x_{-1} = 1.2x_1 = x_0 & \end{cases} \qquad \text{con} \qquad x_{-n} = x_n.$$

En matemática discreta, se debería haber visto un sencillo método que afirma que la solución de $0.4x_j + 0.6x_{j+2} = x_{j+1}$ es de la forma $x_j = A + B(2/3)^j$. Sin esto, es difícil que a uno se le ocurra. Lo escribí en clase porque parece que no lo conocíais.

Ahora ajustamos A y B para que en $j = 1$ y $j = 2$ salga x_1 y x_2. De ello se sigue

$$x_j = 3x_2 - 2x_1 + 3(x_1 - x_2)(2/3)^{j-1} \qquad \forall j \ge 1.$$

Utilizando la segunda y la tercera ecuaciones del sistema, se obtiene $x_1 = 5x_0/6$ y $x_2 = 5x_0/9$, que sustituyendo en la fórmula anterior permite concluir

$$x_j = \frac{5}{4}x_0\Big(\frac{2}{3}\Big)^{|j|} \qquad \forall j \ne 0.$$

Ahora sólo hay que ajustar x_0 para que se cumpla $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n = 1$, resultando $x_0 = 1/6$.

Observación. El problema no pide probar que el tiempo de retorno es finito, sin embargo es fácil intuir que la probabilidad de que el primer retorno se produzca tras n pasos tiene un decaimiento geométrico. Por ello, su esperanza tiene que ser finita. Se deja como ejercicio tratar de escribir una prueba completa.

14) Hecho en la teoría.

15) Siempre volvemos en un número par de pasos, digamos $2n$ y para ello hay que dar el mismo número de pasos k al N y al S, y los mismos l pasos al E y al O. Se tiene $2n = 2k + 2l$ y el número de posibilidades es

$$PR_{2n}^{k,k,l,l} = \frac{(2n)!}{k!k!l!l!}.$$

Cada dirección tiene probabilidad $1/4$ y un camino especificado de $2n$ pasos, $1/4^{2n}$ por tanto el número de retornos al origen en a lo más $2M$ pasos es el indicado.

Se cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^{2m} x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m} x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^{2m} dx = \frac{2\pi}{2^{2m}} \binom{2m}{m}.$$

Con esto y el binomio de Newton,

$$\frac{4^{n-1}}{\pi^2} \iint (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^{2n}\, dxdy = \sum_{k+l=n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2l}{l}$$

y la cantidad dentro del sumatorio es $PR_{2n}^{k,k,l,l}$.

Cerca de $x = \pi/2$ se tiene $\operatorname{sen} x \sim 1 - (x - \pi/2)^2/2$. Entonces sólo la parte de la integral cercana a $\pi/2$ en x y en y ya contribuye a la serie completa más que

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} \big(1 - c(x^2 + y^2)\big)^{2n}\, dxdy \ge c' \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

donde se ha sumado la serie geométrica. Pasando a polares, es fácil ver que la última integral diverge.