Gravitación y mecánica

Las leyes de Kepler

Las leyes de Kepler son unas leyes astronómicas empíricas dadas por Johannes Kepler en 1609 (la primera y la segunda) y en 1619 (la tercera), basándose en los datos compilados por Tycho Brahe.

- Primera ley. Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos.
- Segunda ley. La línea que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Tercera ley. El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

En tiempos de Kepler sólo se conocían 6 planetas. Excepto en el caso de Mercurio, las órbitas son casi circulares, lo que hace más notable el enunciado de sus leyes. Por otro lado, un vistazo a [Kep52] y a algunas de sus afirmaciones lo alejan del concepto actual que tenemos sobre un científico.

Esta leyes, como veremos, son "correctas" con el modelo matemático newtoniano sin tener en cuenta las perturbaciones debidas a la interacción entre los planetas y otros objetos del Sistema Solar, es decir, considerando sólo la atracción del Sol.

La ley de gravitación universal

La idea de que las masas ejercían una fuerza atractiva e incluso que dependía del inverso del cuadrado de la distancia, ya había sido aventurada por científicos contemporáneos de Isaac Newton. De hecho esta última parece deberse a su rival Robert Hooke que fue menospreciado por Newton en diferentes ocasiones. Una breve descripción de la contribución de Newton y de otros autores puede encontrarse en [Gri02].

El gran mérito de Newton fue demostrar que a partir de la *ley de gravitación universal*

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

podían derivarse las leyes de Kepler y, teóricamente, describir exactamente los movimientos de los astros. Esto constituyó una revolución no sólo científica sino también filosófica.

La fuerza gravitatoria entre dos partículas es atractiva y en la dirección del vector que las une. Entonces (1) se escribe en forma vectorial como

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x} \tag{2}$$

donde $\vec{x}$ es el vector que va de la partícula usada como referencia a la otra.

Como hemos apuntado, consideramos sólo la acción debida a la masa M_S del Sol (los planetas tienen una masa comparativamente despreciable). Consideramos también el Sol y los planetas como partículas, despreciando sus dimensiones (más adelante veremos que esto es matemáticamente lícito). Entonces si escribimos $\vec{x} = \vec{x}(t)$ para el vector que describe el planeta, visto desde el Sol, en función del tiempo t y recordamos $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{x}''$, sustituyendo (2), tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{x}'' = -\frac{GM_S}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x} \qquad \text{con} \qquad \vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big). \tag{3}$$

Esta ecuación implica (derivando) que $\vec{x} \times \vec{x}'$ es un vector constante (esto se llama *conservación del momento angular*) y, por supuesto, $\vec{x}$ es perpendicular a ese vector. Entonces las curvas descritas por $\vec{x}(t)$, las órbitas, son planas. Además la ecuación es invariante por giros y podemos suponer que dicho plano es $z = 0$. Con ello nos quedan dos funciones incógnita $x(t)$, $y(t)$. y la simetría radial sugiere hacer el cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Las ecuaciones, cambiando sólo el segundo miembro, serían:

$$x'' = -Kr^{-2}\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y'' = -Kr^{-2}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{4}$$

donde $K = GM_S$ es una constante (universal) positiva. En el sistema internacional, se tiene $G = 6.67\cdot 10^{-11}$ y $M_S = 1.99\cdot 10^{30}$. Calculando $x''\cos\theta + y''\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $x''\,\mathrm{sen}\,\theta - y''\cos\theta$, se llega a que estas ecuaciones equivalen a

$$K = r^3(\theta')^2 - r^2 r'' \qquad \text{y} \qquad 0 = r\theta'' + 2r'\theta' \tag{5}$$

Recordemos que I. Newton fue uno de los inventores del cálculo infinitesimal. Sin embargo en su obra maestra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, para deducir las leyes de Kepler utilizó una formulación oscura para sus contemporáneos, y más aún en la actualidad, procediendo por combinación de argumentos geométricos y analíticos [New99].

Deducción de las leyes de Kepler

Las ecuaciones (5) no tiene soluciones explícitas $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ pero sí se puede probar que, sin atender a la dependencia en t (la parametrización de la curva), las órbitas son secciones cónicas y satisfacen las leyes de Kepler en el caso de los planetas.

La segunda ecuación de (5) se puede reescribir como $\frac{1}{2}\big(r^2\theta'\big)' = 0$ y esto implica que

$$r^2\theta' = h \qquad \text{con } h \text{ constante (dependiendo del planeta).} \tag{6}$$

De nuevo, en términos físicos, esto es proviene de la conservación del momento angular.

Ahora bien, el área barrida por una curva en polares entre el ángulo 0 y el ángulo θ es (cambio de variable o argumento geométrico):

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{7}$$

Si $A(t)$ es el área barrida por una solución de (5) en función del tiempo, se tiene, por la regla de la cadena:

$$A'(t) = \frac{1}{2}r^2\big(\theta(t)\big)\theta'(t) = \frac{1}{2}h. \tag{8}$$

Esto prueba la segunda ley de Kepler.

Teniendo en cuenta $r^2\theta' = h$, la primera ecuación de (5) es $K = h^2r^{-1} - r^2r''$, que tras el cambio $u(t) = 1/r(t)$ se escribe de manera más complicada como

$$Ku^2 = h^2u^3 - 2u^{-3}(u')^2 + u^{-2}u''. \tag{9}$$

Como hemos avanzado no hay soluciones explícitas de esta ecuación en función de tiempo. Escribamos U para indicar u como función de θ, es decir $u(t) = (U\circ\theta)(t)$. Por la regla de la cadena y usando que $\theta' = hu^2$ se tiene después de unos cuantos cálculos que la ecuación equivale a

$$U'' + U = -Kh^{-2} \tag{10}$$

Cuya solución general es $U(\theta) = Kh^{-2} + \mu\cos(\theta - \lambda)$. Cambiando el origen del ángulo en las coordenadas polares, podemos suponer $\lambda = 0$ y se tiene finalmente que, salvo rotaciones, las soluciones de (5) describen una curva en polares dada por

$$r(\theta) = \frac{h^2K^{-1}}{1 + \lambda h^2K^{-1}\cos\theta}. \tag{11}$$

Por otro lado, la ecuación de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en polares centradas en uno de sus focos es

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad \text{donde} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \tag{12}$$

Nótese que la *excentricidad* e cumple $0 \le e < 1$. Por tanto, siempre que $0 \le \lambda h^2 K^{-1} < 1$, como ocurre para todos los planetas, podremos ajustar los parámetros y se obtiene la primera ley de Kepler.

Digamos que T es el periodo orbital, entonces cuando $t \in [0,T]$ se recorre toda la elipse y se habrá barrido el área de toda ella, que según lo introducido en la deducción de la segunda ley de Kepler, es

$$A(T) = \frac{1}{2}\int_0^T r^2\big(\theta(t)\big)\theta'(t)\, dt = \frac{1}{2}Th. \tag{13}$$

Por otro lado, el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$. Comparando con el denominador de la fórmula para la órbita de un planeta, sabemos que $a(1-e^2) = h^2K^{-1}$, entonces

$$\frac{1}{2}Th = \pi a^{3/2} h K^{-1/2}. \tag{14}$$

Cancelando la h y elevando al cuadrado se obtiene la tercera ley de Kepler porque K es una constante universal.

Gravedad de una masa con simetría esférica

Al considerar una gran masa, como el Sol, cada una de las partículas que lo componen, ejercen una fuerza gravitatoria sobre una masa exterior dada por (2). Para calcular la fuerza total habría que sumar los vectores correspondientes a todas estas fuerzas. En principio esto requiere una integral que no es en absoluto sencilla. Newton resolvió el problema con ingeniosos argumentos geométricos en los teoremas XXX y XXXI de [New99], llegando a la conclusión de que cuando hay simetría esférica, los efectos gravitatorios externos son idénticos a suponer que toda la masa está concentrada en el centro. Es decir, no hay ningún inconveniente en razonar con el Sol (o los planetas) como si fueran partículas, incluso a distancias cortas de su superficie.

Este resultado se puede deducir a través de la *ley de Gauss para el campo gravitatorio* que no es más que una aplicación del teorema de la divergencia. En una forma simplificada, si tenemos masas $\{m_i\}_{i=1}^n$ en puntos $\{\vec{p}_i\}_{i=1}^n$ interiores una región sólida B con frontera S, ejercerán una fuerza gravitatoria sobre una masa m en $\vec{x}$ dada por

$$\vec{F} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{Gm_i m}{\|\vec{x}-\vec{p}_i\|^3}(\vec{x}-\vec{p}_i). \tag{15}$$

Este campo tiene divergencia nula en la región $B - \bigcup_{i=1}^n B_i$ donde las B_i son pequeñas esferas centradas en los $\vec{p}_i$ contenidas en B. Aplicando el teorema de la divergencia y calculando directamente las integrales sobre la parte de la frontera correspondiente a la superficie de las B_i se obtiene

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -4\pi Gm\sum_{i=1}^{n} m_i \tag{16}$$

que es una forma de la ley de Gauss para el campo gravitatorio. Con un proceso de paso al límite, es también aplicable a un continuo de masas sustituyendo el sumatorio por la masa total M en el interior.

Consideremos la fuerza gravitatoria $\vec{F}$ ejercida por ejemplo por el Sol (o por cualquier objeto con simetría radial) sobre una partícula de masa m situada a distancia r (mayor que el radio) de su centro. Tomemos como S en (16) la esfera de radio r. Por la simetría radial, $\vec{F}$ debe ser sobre S de la forma $\vec{F} = -f(r)\vec{n}$ para cierta función escalar f y $\vec{n}$ el vector normal unitario. La integral en (16) es $-4\pi r^2 f(r)$ y se concluye $f(r) = GMm/r^2$ que equivale a (1).

Mecánica lagrangiana

La *energía cinética* de un sistema de partículas de masas m_i y posiciones (x_i, y_i, z_i) viene dada por

$$(17) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \|\vec{v}_i\|^2 \qquad \text{con} \qquad \vec{v}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$$

donde, siguiendo una tradición que parte de Newton, un punto sobre una función indica su derivada con respecto del tiempo. Por otro lado, la *energía potencial* indica una energía que depende de la posición de las partículas, ya sea por efecto del campo o por interacciones entre ellas. Se define como una función V que cumple que $-\nabla V$ es la fuerza.

Por ejemplo, en el caso de la gravedad ejercida por una masa M en el origen, la energía potencial para una partícula de masa m en $\vec{x} = (x, y, z)$ es

$$(18) \qquad V = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|} \qquad \text{porque} \qquad -\nabla V = -\frac{GMm}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x}.$$

Si hubiera varias partículas, se sumarían las energías potenciales.

En la segunda mitad del siglo XVIII, J.-L. Lagrange reformuló la mecánica de Newton utilizando la expresión $L = T - V$, hoy en día llamada *lagrangiano*.

Según el *principio de mínima acción*, en un intervalo corto de tiempo $[a, b]$, las trayectorias $q_i = q_i(t)$ son funciones que minimizan la *acción* $\int_a^b L\,dt$. En rigor habría que exigir que la acción fuera estacionaria en lugar de mínima pero eso es indiferente para nuestro análisis. El *cálculo de variaciones*, ya desarrollado L. Euler con fines mecánicos y con antecedentes en el problema de la *braquistocrona* (resuelto por Johann y Jakob Bernoulli y el propio Newton), afirma [Lán70] que si $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ entonces los minimizantes satisfacen las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$(19) \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Una consecuencia sencilla es que si L no depende de la última variable (no depende del tiempo nada más que a través de las q_i y $\dot{q}_i$) a lo largo de cada trayectoria minimizante, la *energía total*

$$(20) \qquad E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

no varía con el tiempo, es decir, es constante. Si utilizamos como q_i las posiciones de las partículas en cartesianas, de (17) y que V sólo depende de la posición (no de la velocidad) se deduce que $T + V$ es constante, lo cual es la *conservación de la energía* en su forma habitual.

Lo más importante de la formulación lagrangiana es que al venir de un problema de mínimos, el resultado no depende de las coordenadas empleadas. La libertad para elegir las coordenadas es muy elegante desde el punto de vista matemático y además conlleva una reducción drástica de los cálculos. En el caso de la gravitación, tras la hipótesis de que el movimiento tiene lugar en el plano $z = 0$, el lagrangiano en cartesianas es

$$(21) \qquad L = L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La simetría sugiere emplear coordenadas polares y con un sencillo cambio se obtiene el lagrangiano en polares

$$(22) \qquad L = L(\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para (22) y la energía son

$$(23) \qquad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \qquad \text{y} \qquad E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}.$$

De la segunda, dejada sin operar a propósito, se deduce que $r^2\dot{\theta}$ es una constante, digamos h, en cada trayectoria. Esto prueba la *segunda ley de Kepler*: *el vector $\vec{x}$ barre áreas iguales en tiempos iguales*, simplemente usando la fórmula que calcula el área en polares.

Ahora podemos usar $r^2\dot{\theta} = h$ para sustituir en la primera de las ecuaciones de Euler-Lagrange y así obtener una sola ecuación diferencial de segundo orden. Un poco más breve es utilizar la conservación de E, que es consecuencia de las dos ecuaciones. Así se obtiene que cada trayectoria es una solución de

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} \tag{24}$$

para algunas constantes h y E.

Si queremos estudiar como varía r en función de θ debemos considerar (con el abuso de notación habitual en la regla de la cadena)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{r}}{hr^{-2}} \qquad \text{que implica} \qquad \frac{dr}{d\theta} = h^{-1}r^2\Big(\frac{2E}{m} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}\Big)^{1/2}.$$

Esta última ecuación quizá parezca más complicada que la de partida pero se puede integrar. Completando cuadrados, el segundo miembro se escribe como $K_1^{-1}r^2\big(1 - (K_1r^{-1} - K_2)^2\big)^{1/2}$ con K_1 y K_2 constantes en función de E/m, h y GM, por ejemplo, $K_1 = hm^{1/2}(2E)^{-1/2}$. Entonces

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{d(K_1/r - K_2)/dr}{\sqrt{1 - (K_1r^{-1} - K_2)^2}} \qquad \text{que implica} \qquad \theta(r) = \arccos(K_1r^{-1} - K_2),$$

donde se ha elegido una constante de integración nula (lo cual equivale a especificar cierto origen de ángulos). Esto se escribe de una manera más atractiva como

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{con } p \text{ y } e \text{ constantes,} \tag{25}$$

que es la ecuación de una cónica de excentricidad e escrita en polares (centradas en uno delos focos). Si sustituyéramos datos reales de los planetas, obtendríamos que $0 \le e < 1$, lo que corresponde a una elipse. De hecho no hay duda porque las otras cónicas (parábola e hipérbola) no son cerradas.

A pesar del enunciado de la ley de Kepler, las órbitas de los planetas (con la excepción de Mercurio) tienen excentricidades pequeñas y la ecuación anterior se parece bastante a la circunferencia $r = p$. En el caso de la Tierra $e = 0.017$, lo que significa que si hiciéramos un dibujo a escala de la órbita con un eje mayor de $1m$, el otro sería alrededor de $0.14mm$ más corto. Esto es totalmente inapreciable a simple vista.

Leyes de conservación: el teorema de Noether

Con el uso de la mecánica lagrangiana, la deducción de la primera ley de Kepler es más rápida y natural. El único paso un poco truculento ha sido calcular una integral un poco complicado, y en el peor de los casos (que es el habitual) se podría dejar esta tarea a un integrador numérico. Parte del éxito se basa en que las cantidades conservadas han aparecido naturalmente, mientras que con la mecánica vectorial de Newton no surgen matemáticamente de forma inmediata sino que requieren conocimientos físicos previos. Por otro lado, hay que confesar que, incluso en la demostración lagrangiana, hemos empleado que las órbitas son planas y esto es muy natural desde el punto de vista físico pero no tanto en el contexto puramente matemático. Sería deseable una teoría matemática de cantidades conservadas de donde se pueda deducir.

E. Noether probó un sencillo resultado llamado *teorema de Noether* en el contexto de la Física teórica, donde es importantísimo. En pocas palabras, este resultado establece que cada simetría del lagrangiano da lugar a una ley de conservación.

El enunciado y la demostración son bien simples: Supongamos que podemos hacer depender q_i de un parámetro h de forma que L quede invariante. Es decir, que podemos cambiar $q_i = q_i(t)$ por $q_i(t,h)$, digamos con $q_i(t,0) = q_i(t)$ y h en cierto entorno de cero. Entonces

$$0 = \frac{\partial L}{\partial h} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial q_i}{\partial h} \Big) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \Big) \tag{26}$$

y usando (19),

$$\frac{d}{dt} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \Big) = 0 \qquad \text{en particular} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \quad \text{se conserva.} \tag{27}$$

Se suele tomar esta cantidad evaluada en $h = 0$. Éste es el teorema de Noether.

Como ejemplo clásico de la aplicación de (27), consideremos un sistema de partículas que interaccionan unas con otras con un potencial que depende de la distancia, una situación típica en mecánica. El lagrangiano es de la forma (esto se relaciona la tercera ley de Newton)

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i,j} V\big(\|(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j)\| \big). \tag{28}$$

La transformación $x_i \mapsto x_i + h$ deja invariante L y, según el teorema de Noether, tenemos que $\sum_i m_i \dot{x}_i$ se conserva. Repitiendo el razonamiento con las transformaciones $y_i \mapsto y_i + h$ y $z_i \mapsto z_i + h$, se llega a la conservación de

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \text{con} \qquad \vec{v}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i). \tag{29}$$

Ésta es la bien conocida *ley de conservación del momento lineal*.

Otra ley bien conocida es la *ley de conservación del momento angular*, que se deduce a través del teorema de Noether cuando el lagrangiano muestra simetría esférica. Por ejemplo, en el caso de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una *fuerza central*, que deriva de un potencial que depende sólo de la distancia al origen,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V\big(\|(x,y,z)\| \big). \tag{30}$$

Este lagrangiano es invariante por cualquier giro. Al aplicar el teorema de Noether para el giro genérico $(x,y,z) \mapsto (x \cos h - y \operatorname{sen} h, x \operatorname{sen} h + y \cos h, z)$ alrededor del eje Z, se obtiene que $m(\dot{y}x - \dot{x}y)$ se conserva. Ésta es la tercera componente del *momento angular*

$$\vec{L} = m(x,y,z) \times \vec{v} = (x,y,z) \times \vec{P} \tag{31}$$

donde, como antes, $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y $\vec{P}$ es el *momento lineal* para una partícula. Con giros alrededor de los otros ejes, se deduce que $\vec{L}$ se conserva y de ahí, como hemos visto, que las órbitas son planas.

Una observación final, es que la conservación de la energía no se obtiene con la forma que hemos dado del teorema de Noether pero sí de otra generalizada [Arn78].

Referencias

[Arn78] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1978. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60.

[Gri02] J. Gribbin. *Historia de la Ciencia 1543-2001*. Crítica, 2002.

[Kep52] J. Kepler. *The harmonies of the world*. Great Books of the Western World, no. 16. Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, London, Toronto, 1952.

[Lán70] C. Lánczos. *The variational principles of mechanics*. Mathematical Expositions, No. 4. University of Toronto Press, Toronto, Ont., fourth edition, 1970.

[New99] I. Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. University of California Press, Berkeley, CA, 1999. A new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, assisted by Julia Budenz, Preceded by “A guide to Newton’s *Principia*” by Cohen.