En esta hoja $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ se abrevia con $\mathbb{Z}_N$ y $e^{2\pi i x}$ se abrevia con $e(x)$

1) Consideremos la función $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(0) = 10$, $f(\pm 1) = -2 \mp 2i$ y $f(2) = -2$. Calcula su desarrollo de Fourier discreto.

2) Prueba que la convolución de dos funciones es una operación conmutativa.

3) Consideramos las funciones 1-periódicas reales que en $[0, 1]$ coinciden, respectivamente, con $\min(x, 1-x)$ y con $(-1)^{[2x]}$ donde $[\,\cdot\,]$ indica la parte entera. Calcula sus coeficientes de Fourier. Expresar la primera serie de Fourier en términos de cosenos y la segunda en términos de senos.

4) Calcula la transformada de Fourier de la función característica f de un intervalo $[-a/2, a/2] \subset \mathbb{R}$. Estudia qué ocurre con $a^{-1}f$ y $a^{-1}\widehat{f}$ cuando $a \to 0$. Teniendo esto en cuenta, ¿cómo parece que habría que definir $\int_{-\infty}^{\infty} e(\xi x)\, d\xi$? Esta fórmula se emplea con mucha frecuencia en Física sin más explicaciones.

5) Para tratar de forma discreta ondas muy oscilatorias hay que tomar muestras muy grandes para limitar ambigüedades graves. Sea una señal $f(x) = Ae(\nu x) + Be(-\nu x)$ con $\nu \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que al extraer N muestras se obtiene $f(j/N) = 0$ para $0 \le j < N$, es decir, lo mismo que se obtendría muestreando la función nula. ¿Cuáles son los posibles valores de ν? Explica por qué esto sugiere que el número de muestras debe ser al menos el doble de la frecuencia de una señal (la generalización de esto es el *Teorema de Nyquist*).

6) Si en una imagen en formato JPEG hacemos cero todos los coeficientes de Fourier excepto los a_{00} que corresponden a la función ϕ_{00}, ¿qué ocurrirá?

7) Halla los coeficientes antes de cuantificar de una imagen JPEG que consta sólo de los píxeles de la primera columna en blanco (valor=255) y el resto negros (valor=0), tratando de expresarlos de manera lo más simple posible.

8) Una imagen JPEG que consta de una línea horizontal negra gruesa de lado a lado en un fondo blanco no es invariante por traslaciones; es decir, el tamaño del fichero depende de la altura a la que esté la línea. Explica este fenómeno. ¿Para qué grosores y posiciones habrá mayor compresión?

9) Demuestra que los polinomios de Chebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ son realmente polinomios para $x \in [-1, 1]$ y que satisfacen $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ para $n \ge 1$.

10) Prueba que para funciones impares los coeficientes con índice par en el desarrollo de Chebyshev-Fourier son nulos. Busca un análogo para funciones pares.

11) Explica cómo calcularías la función tangente para cualquier valor real si tu calculadora sólo te permitiera evaluarla en $[-\pi/4, \pi/4]$. Considera el desarrollo de Chebyshev-Fourier de $f(x) = \tan(\pi x/4)$ truncado hasta los dos primeros coeficientes no nulos. Con ayuda de un ordenador, aproxima estos dos coeficientes con 6 cifras decimales y comprueba la precisión al aproximar $\tan(3/4)$. Compara el resultado con el obtenido al emplear dos términos no nulos de la serie de Taylor de f.

12) Sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, calcula la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, utilizando un cambio de variable $x \mapsto \mu x + \nu$ con $\nu \in \mathbb{C}$. Justifica que este cambio complejo es lícito.

13) El filtro de convolución `sharpen` para imágenes se representa a veces con una matriz 3×3 cuyos elementos son -1, excepto el central que es 9. Intenta adivinar su efecto visual.

14) Explica por qué si se sabe que la densidad es una función es radial, entonces basta una proyección para reconstruirla por tomografía. Demuestra que en este caso una fórmula para hacerlo es $\rho(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} |r|\widehat{P_0}(r)e(r\cos\theta\,\sqrt{x^2+y^2})\,d\theta dr$.

15) Halla $P_\theta(t)$ al hacer tomografías de las secciones de: *a*) Una barra homogénea de densidad 1 y radio 1; *b*) esta barra vaciada hasta radio 1/2; *c*) el resultado de rellenar el hueco central con un material de densidad 2.

16) Un modelo natural para la temperatura en el interior de la Tierra a profundidad x (pequeña) es que $u(x,t)$ es periódica en t de periodo un año por efecto de las estaciones, y entonces $u(x,t) = \sum c_n(x)\; e(nt)$. Deduce $c_n(x) = a_n e^{-x(1\pm i)\sqrt{\pi|n|}}$ de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, suponiendo $u(+\infty,t) < \infty$, con a_n los coeficientes de Fourier de la temperatura en la superficie y $\pm$ el signo de n.

17) Halla $u(x,t)$ en el problema anterior cuando $u(0,t) = \lambda_0 + \operatorname{sen}(2\pi t)$ (el verano corresponde a $t = 1/4$ y el invierno a $t = 3/4$). Deduce que las estaciones no actúan con la misma intensidad ni al mismo tiempo en la superficie que en el interior.

18) Explica por qué si $f : \mathbb{Z}_{2^k} \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces $f_p(n) = f(2n)$ y $f_i(n) = f(2n+1)$ se pueden considerar funciones $\mathbb{Z}_{2^{k-1}} \longrightarrow \mathbb{C}$ y satisfacen $\widehat{f}(n) = \widehat{f_p}(n) + e\big(-n/2^k\big)\widehat{f_i}(n)$. La iteración de esta fórmula da lugar a la importantísima FFT. Suponiendo los $e\big(n/2^k\big)$ conocidos de antemano, explica por qué esto ahorra operaciones al calcular $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{2^k}$.