1) Una cadena de Markov con tres estados, $\{1,2,3\}$, tiene probabilidades de transición $p_{ij} = i/10$ para $1 \le i \le 3$, $j \in \{1,2\}$ y $p_{i3} = 1 - i/5$. Calcula $\text{Prob}(X_1 = X_2 = 2 | X_0 = 1)$.

2) Considera la cadena de Markov con cuatro estados y con probabilidades de transición $p_{12} = p_{24} = p_{43} = p_{32} = 1$. Halla para qué distribuciones iniciales existe una distribución límite.

3) Lanzamos una moneda al aire y consideramos la variable aleatoria X_n que da el número de caras en las tiradas n y $n-1$. ¿Es $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cadena de Markov?

4) Si la matriz P de probabilidades de transición de una cadena de Markov finita es simétrica y con todos sus elementos no nulos, explica por qué P^n tiende a una matriz con todos sus elementos iguales.

5) En una cadena de Markov hay tres estados y se sabe $p_{11} = 3p_{13} = 1/2$, $p_{21} = 3/4$ y $p_{22} = p_{31} = p_{33} = 0$. Halla el resto de las probabilidades de transición, justifica que hay una distribución límite y hállala.

6) Tenemos cuatro páginas web A, B, C y D. Cada una de ellas tiene dos enlaces: A y B enlazan ambas a C y a D, C enlaza a B y a D, y D enlaza a A y a B. Explica por qué la cadena de Markov correspondiente es regular. Navegando al azar desde A, halla el número medio de *clicks* para la primera vuelta a A. ¿Cuáles son las páginas más y menos importantes?

7) Recuerda que el algoritmo *page rank* sustituye la matriz de transición P por $P_\epsilon = (1-\epsilon)P + \epsilon E$ donde E es la matriz $N \times N$ con todos sus elementos $1/N$. Explica por qué P_ϵ es una matriz de transición lícita de una cadena de Markov regular cuando $0 < \epsilon \le 1$.

8) Consideremos tres páginas web A, B y C. Las dos últimas están enlazadas entre ellas y A enlaza a B. Comprueba que la distribución límite cuando se aplica el algoritmo *page rank* viene dada por $\big(\epsilon/3, (1-2\epsilon/3)/(2-\epsilon), (1-\epsilon+\epsilon^2/3)/(2-\epsilon)\big)$. Halla los autovalores de P_ϵ y, con ellos, trata de explicar cómo varía la "velocidad" de convergencia en términos de ϵ. Por ejemplo, ¿es bueno o malo escoger el número de iteraciones como el inverso de ϵ?

9) En una urna hay dos bolas blancas y otras dos negras. Escogemos dos al azar y las pasamos a otra urna. En cada instante se escoge al azar una bola de cada urna y se intercambian. Considerando los estados dados por el número de bolas negras en la primera urna más uno, escribe la matriz de probabilidades de transición y halla la distribución límite, probando que existe.

10) Supongamos que variamos el esquema del ejercicio anterior considerando las 4 bolas negras y numeradas. En cada paso elegimos un número al azar y cambiamos de urna la bola correspondiente (sin reemplazarla). Halla la distribución estacionaria.

11) Se lanza una moneda hasta que salga una de las secuencias XCC, CXC, CCX. ¿Por cuál de ellas apostarías? Trata de formular el problema como una cadena de Markov (no irreducible) con estados $\{XX, XC, CX, CC, XCC, CXC, CCX\}$, donde los estados representan las dos últimas tiradas o el fin del juego. Calcula el número de tiradas esperado del juego.

12) Da un ejemplo de una cadena de Markov finita regular tal que P^6 tenga algún elemento nulo, donde P es la matriz de transición.

13) Consideremos la cadena de Markov infinita con estados en $\mathbb{Z}$, consistente en que en $\mathbb{Z}^+$ damos un paso a la derecha con probabilidad 0.4 y a la izquierda con probabilidad 0.6, mientras que en $\mathbb{Z}^-$ estas probabilidades están intercambiadas. Además, desde el 0 se alcanzan el 1 y el -1 con probabilidad $1/2$. Como el origen "atrae" a los otros estados, se puede probar que el tiempo medio de retorno es finito y la teoría asegura que existe una distribución estacionaria. ¿Cuál es? Por la simetría se puede suponer que toma los mismos valores en los negativos que en los positivos.

14) El número total de partículas se conserva a lo largo del tiempo en el modelo discretizado de movimiento browniano (paseo aleatorio) en una dimensión. Traduce esto en alguna ley de conservación para la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ (con dato de decaimiento rápido) y demuéstrala.

15) Paseamos por $\mathbb{Z}^2$ partiendo del origen y avanzando de uno en uno en una dirección N, S, E, O, elegida al azar. Demuestra que el número de retornos al origen en a lo más $2M$ pasos es en media $\sum_{n=1}^{M} 4^{-2n} \sum_{k+l=n} (2n)!/(k!)^2(l!)^2$. Comprueba que esta serie diverge cuando $M \to \infty$, expresando la suma interior como $4^{n-1}\pi^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^{2n}\, dxdy$.