$GM = 1.33 \cdot 10^{20} m^3 s^{-2}$ con M la masa del Sol. Radio de la Tierra $= 6.38 \cdot 10^6 m$

1) Una *fuerza central* es una fuerza que en $\vec{x}$ tiene módulo que sólo depende de $\|\vec{x}\|$ y apunta en la dirección $\vec{x}$. Por tanto $\vec{F} = m\vec{a}$ lleva a una ecuación del tipo $\vec{x}'' = g(\|\vec{x}\|)\vec{x}$. Calcula la derivada de $\vec{x} \times \vec{x}'$ (el momento angular) y deduce de ello que cada curva solución está contenida en un plano. Otra forma (más complicada) de proceder es probar directamente que la torsión de la curva es nula. Investiga este procedimiento usando la fórmula de la torsión.

2) La estación espacial internacional orbita a unos $400km$ de la superficie de la Tierra. Calcula en qué proporción ha disminuido la fuerza de la gravedad a esa altura. ¿Cuánto pesaría una persona de $80kg$ a esa altura? ¿Por qué entonces las imágenes que nos llegan muestran astronautas y objetos flotando ingrávidos?

3) Prueba que la curva en polares $r(\theta) = a^{-1}b^2(1 + e\cos\theta)^{-1}$, con $e = c/a = \sqrt{1 - a^{-2}b^2}$ describe la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ cuando el origen de las coordenadas polares está en uno de los focos. Prueba también que la curva en polares $r(\theta) = l/(1 + e\cos\theta)$, con $e \geq 0$ y $l > 0$ constantes, describe una circunferencia si $e = 0$, una elipse si $0 < e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$. *Indicación*: Escribe $r(1 + e\cos\theta)$ en cartesianas.

4) Sea V es el potencial de una fuerza $\vec{F}$, esto es $\vec{F} = -\nabla V$, que satisface $\mathrm{div}\vec{F} = 0$. Demuestra que si V es una función radial (sólo depende de la distancia al origen), entonces necesariamente $\vec{F} = K\|\vec{x}\|^{-3}\vec{x}$, como en la ley de gravitación universal.

5) Explica por qué en el punto más cercano al Sol de la órbita de un planeta, digamos a distancia r_p, la velocidad v_p debe cumplir $v_p = r_p\theta'$. Recuerda que en el movimiento de un planeta $h = r^2\theta'$ es constante y que $a(1 - e^2) = h^2/GM$ con a el semieje mayor y e la excentricidad. Deduce de todo ello que $v_p = br_p^{-1}\sqrt{GM/a}$.

6) Prueba que si el semieje mayor de la elipse de un planeta es a entonces su velocidad cuando está a distancia r del Sol es $\sqrt{2GM/r - GM/a}$. *Indicación*: Utiliza el problema anterior y la conservación de la energía.

7) El cometa Halley tiene distancias máxima y mínima al Sol dadas por $5.25 \cdot 10^{12}m$ y por $8.77 \cdot 10^{10}m$, respectivamente. Calcula la fórmula de su elipse en coordenadas cartesianas, su valor de $r^2\theta'$ y sus velocidades máxima y mínima.

8) La excentricidad de la órbita de la Tierra es aproximadamente $e = 0.017$. Si en un libro de texto vemos la órbita dibujada con un eje mayor de $20cm$, ¿cuánto debería medir el eje menor? Suponemos, consecuentemente, la órbita de la Tierra circular. Si en una galaxia lejana hay un planeta hermano de la Tierra con la misma órbita pero recorrida sólo en tres meses, ¿qué relación hay entre la masa de su estrella y la de nuestro Sol?

9) Sabiendo que $GM = 3.99 \cdot 10^{14} m^3 s^{-2}$ con M la masa de la Tierra, calcula a qué distancia de su superficie orbitan los satélites geoestacionarios: los que están siempre sobre el mismo punto geográfico porque giran a la par que la Tierra, una vez cada 24 horas.

10) Usando la ley de Gauss, prueba que en un planeta esférico homogéneo hueco no hay gravedad en el interior.

11) Newton resolvió el problema anterior con un bello argumento geométrico: Fijado un punto interior se considera un doble cono que lo tiene como vértice. El cono corta a la superficie interior del planeta en dos regiones que cuando se reducen a tamaño infinitesimal ejercen la misma atracción. Intenta elaborar este argumento hasta que te suene convincente.

12) Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange con coordenada generalizada la distancia desde el punto de partida, halla las ecuaciones de movimiento de un objeto de masa m que cae por un plano inclinado de ángulo α partiendo del reposo. La energía potencial gravitatoria es mgy donde $g = 9.8ms^{-2}$ y con y la altura.

13) Sea G_α un giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo α alrededor de un eje dado por un vector unitario $\vec{n}$ y sea $f(\alpha) = G_\alpha(\vec{x})$ para un $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Prueba que $f'(0) = \vec{n} \times \vec{x}$ y utiliza el teorema de Noether para deducir que si $L = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - V(\|\vec{x}\|)$, entonces el momento angular $\vec{x} \times m\vec{v}$ se conserva.

14) Sabiendo que entre las superficies de revolución cuyos bordes son $\{x^2+y^2 = 4,\ z = \pm 1\}$ hay una de área mínima, prueba que es $\sqrt{x^2+y^2} = C\cosh(z/C)$ con $C \approx 1.69$. *Indicación*: Recuerda (o demuestra) que si la gráfica de $y = y(x)$, $a \le x \le b$ gira alrededor del eje X el área de la superficie resultante es $2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Después aplica cálculo de variaciones, preferentemente valiéndote de la energía.

15) Para lagrangianos unidimensionales $L(x, \dot{x})$ prueba directamente, únicamente con diversas formas de la regla de la cadena, que las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes por cambios de variable $y = y(x)$.