Soluciones de la Hoja 5

Observación. Las siguientes soluciones están escritas de manera esquemática, sin dar muchos detalles.

1) Hecho en clase.

2) Hecho en clase.

3) En el modelo discretizado, $p(x_k, t_l) = \#\{\text{partículas en } x_k\}/N$ en el instante t_l, con N el número total de partículas, de este modo $\sum_k p(x_k, t_l) = 1$. Si el número total de partículas se conserva a lo largo del tiempo, al tomar límites cuando $N \to \infty$, tendremos $\int u(x,t)\,dx = 1$ para todo tiempo. La ley de conservación sería que si esto se da en el tiempo 0, se da siempre. Esto es, para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = 1 \ \text{ para } t > 0.$$

Como siempre se puede multiplicar una solución por una constante, se puede cambiar el 1 por otra constante (en principio positiva porque $f \geq 0$).

La prueba es que $F(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx$ no depende de t, ya que derivando

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)\,dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x,t)\,dx = u_x(x,t)\Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 0.$$

Hay que notar que u es de decaimiento rápido en x por serlo f.

4) Siempre volvemos en un número par de pasos, digamos $2n$ y para ello hay que dar el mismo número de pasos k al N y al S, y los mismos l pasos al E y al O. Se tiene $2n = 2k + 2l$ y el número de posibilidades es

$$PR_{2n}^{k,k,l,l} = \frac{(2n)!}{k!k!l!l!}.$$

Cada dirección tiene probabilidad $1/4$ y un camino especificado de $2n$ pasos, $1/4^{2n}$ por tanto el número de retornos al origen en a lo más $2M$ pasos es el indicado.

Se cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m} x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^{2m} dx = \frac{2\pi}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Con esto y el binomio de Newton,

$$\frac{4^{n-1}}{\pi^2}\iint (\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y)^{2n}\,dxdy=\sum_{k+l=n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2l}{l}$$

y la cantidad dentro del sumatorio es $PR_{2n}^{k,k,l,l}$.

Cerca de $x=\pi/2$ se tiene $\operatorname{sen} x\sim 1-(x-\pi/2)^2/2$. Entonces sólo la parte de la integral cercana a $\pi/2$ en x y en y ya contribuye a la serie completa más que

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\epsilon}\int_0^{\epsilon}\big(1-c(x^2+y^2)\big)^{2n}\,dxdy\geq c'\int_0^{\epsilon}\int_0^{\epsilon}\frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

donde se ha sumado la serie geométrica. Pasando a polares, es fácil ver que la última integral diverge.

5) Por ser matriz de probabilidades de transición, $P\vec{1}=\vec{1}$ donde $\vec{1}$ es el vector columna con todas sus coordenadas uno. Entonces $\vec{1}^tP=\vec{1}^t$ y el vector fila $(\pi)=(1/N,1/N,\dots,1/N)$ es una distribución de equilibrio y también límite (por tener P elementos positivos). Entonces $\vec{e}_i^{\,t}P^n\to(\pi)$, lo que implica que (π) es la fila i-ésima del límite de P^n.

6) Usando que las filas suman uno, es fácil obtener que la matriz P es

$$\begin{pmatrix}1/2&1/3&1/6\\3/4&0&1/4\\0&1&0\end{pmatrix},\ \text{y unas cuentas prueban } P^3=\begin{pmatrix}1/2&1/3&1/6\\9/16&1/4&3/16\\3/8&1/2&1/6\end{pmatrix}.$$

Como sus elementos son positivos, hay solución límite y viene de resolver el sistema $(\pi)=P(\pi)$ con $(\pi)=(x,y,z)$, $x+y+z=1$. El resultado es $(1/2,1/3,1/6)$.

7) La matriz de probabilidades de transición es

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

Se deja como ejercicio probar que una potencia suya tiene elementos positivos. La distribución límite es la de equilibrio, que resolviendo el sistema

$(\pi)P = (\pi)$ es $(1/6, 5/18, 2/9, 1/3)$, aproximadamente $(0.16, 0.27, 0.22, 0.33)$, por tanto $D > B > C > A$. El tiempo medio para el primer retorno es $\pi(1)^{-1} = (1/6)^{-1} = 6$.

8) Escribimos las probabilidades de transición considerando cada uno de los estados:

$\lfloor \circ \,|\, \circ \rfloor \quad \lfloor * \,|\, * \rfloor \qquad p_{01} = 1, \quad p_{02} = p_{00} = 0.$

$\lfloor * \,|\, \circ \rfloor \quad \lfloor * \,|\, \circ \rfloor \qquad p_{10} = 1/4, \quad p_{11} = 1/2,\ p_{12} = 1/4.$

$\lfloor * \,|\, * \rfloor \quad \lfloor \circ \,|\, \circ \rfloor \qquad p_{21} = 1, \quad p_{20} = p_{22} = 0.$

Se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como no hay ceros en P^2, hay una distribución límite, que es la distribución de equilibrio $(\pi) = (\pi)P$. Buscando la solución de

$$x = \frac{1}{4}y, \qquad y = x + \frac{1}{2}y + z, \qquad z = \frac{1}{4}y,$$

con $x + y + z = 1$, se tiene $(\pi) = (1/6, 2/3, 1/6)$.

9) Como antes, escribimos las probabilidades de transición considerando cada uno de los estados. Las que no se indican son nulas.

$\lfloor\ \rfloor \quad \lfloor ****\rfloor \qquad p_{01} = 1$

$\lfloor * \rfloor \quad \lfloor *** \rfloor \qquad p_{12} = 3/4,\ p_{10} = 1/4$

$\lfloor ** \rfloor \quad \lfloor ** \rfloor \qquad p_{21} = 1/2,\ p_{23} = 1/2$

$\lfloor *** \rfloor \quad \lfloor * \rfloor \qquad p_{32} = 3/4,\ p_{34} = 1/4$

$\lfloor **** \rfloor \quad \lfloor\ \rfloor \qquad p_{43} = 1$

La solución de equilibrio se obtiene resolviendo

$$(\pi) = (\pi)P \qquad \text{con} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El resultado es $(1, 4, 6, 4, 1)/16$. No es casualidad que se obtenga algo proporcional a la cuarta fila del triángulo de Pascal.

10) Digamos que la distribución de equilibrio viene dada por una sucesión doblemente infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que cumple $\sum x_n = 1$. Por la simetría, se tiene $x_j = x_{|j|}$. Si imponemos $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}P$, con la matriz infinita de probabilidades de transición, en $\mathbb{Z}^+$, se tiene

$$x_{j+1} = 0.4x_j + 0.6x_{j+2} \qquad \text{para } j \geq 1.$$

Resolviendo esta recurrencia (matemática discreta) se obtiene

$$x_j = 3x_2 - 2x_1 + 3(x_1 - x_2)\Big(\frac{2}{3}\Big)^{j-1} \qquad \text{para } j \geq 1.$$

Por otro lado, sabemos que

$$x_0 = 0.6(x_1 + x_{-1}) = 1.2x_1 \qquad \text{y} \qquad x_1 = 0.5x_0 + 0.6x_2.$$

Sustituyendo estas ecuaciones se sigue

$$x_j = \frac{5}{4}x_0\Big(\frac{2}{3}\Big)^{|j|} \qquad \text{para } j \neq 0.$$

Finalmente, la condición $\sum x_n = 1$ lleva a $x_0 + 2x_0\sum_{j=1}^{\infty}\frac{5}{4}(2/3)^j = 1$ y el resultado es

$$x_0 = \frac{1}{6}, \qquad x_j = \frac{5}{24}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{|j|} \qquad \text{para } j \neq 0.$$