# Aplicaciones del análisis de Fourier

## Análisis de Fourier en diferentes contextos

En los siglos XVIII y XIX algunos problemas de la física matemática que conducían a ecuaciones en derivadas parciales sugerían que las funciones razonables deberían poder expresarse como una especie de "combinación lineal infinita" de senos y cosenos. La memoria de J. Fourier [Fou88] sobre la ecuación del calor usaba este hecho de manera tan esencial que su nombre ha quedado asociado al *análisis armónico* que es la parte del análisis que se ocupa de descomponer una función en otras más sencillas, a veces llamadas *armónicos*.

Originalmente, las funciones a descomponer eran periódicas. Una función discreta de periodo $N$ se puede identificar con una función definida en $\mathbb{Z}_N$. De la misma forma, una función 1-periódica en $\mathbb{R}$ puede considerarse definida en $\mathbb{T}$, que se interpreta como $[0,1]$ o cualquier intervalo de longitud 1 con los extremos identificados. Es conveniente definir la exponencial compleja $e(x) = e^{2\pi i x}$ para unifica los senos y cosenos.

Las fórmulas básicas del análisis armónico en $\mathbb{Z}_N$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}$, llamadas *desarrollos de Fourier* en los dos primeros casos, son:
Para $f : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N} \widehat{f}(m)e(nm/N) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_N} f(m)e(-nm/N).$$

Para $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e(nx) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e(-nx)\,dx.$$

Para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e(\xi x)\,d\xi \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e(-\xi x)\,dx.$$

En el primer caso se dice que $\widehat{f}$ es la *transformada de Fourier discreta* (DFT); en el segundo, que sus valores son los *coeficientes de Fourier* (terminología que también se aplica a veces en el primer caso); y en el tercero, se dice que es *transformada de Fourier*. Esencialmente, con una redefinición adecuada de la convergencia de series e integrales, los dos últimos casos funcionan en $L^2(\mathbb{T})$ y en $L^2(\mathbb{R})$, respectivamente, pero las cuestiones de convergencia en el sentido habitual son bastante complicadas si no se exige alguna regularidad.

El caso discreto se basa en la sencilla fórmula (suma de una serie geométrica):

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N} e(nm/N) = \delta(n)$$

donde $\delta(n) = N$ si $n \equiv 0 \pmod{N}$ y $\delta(n) = 0$ en otro caso. Teniendo en cuenta que $f(n) = N^{-1}\sum_m f(m)\delta(n-m)$ se deduce el desarrollo de Fourier de $f$. De alguna forma, las fórmulas para $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}$ son límites cuando $N \to \infty$, aunque habitualmente no se prueban así [DM72], [Kör88]. La generalización a más dimensiones, esto es, a $\mathbb{Z}_N^D$, $\mathbb{T}^D$ o $\mathbb{R}^D$ es inmediata simplemente utilizando los desarrollos de Fourier anteriores en cada una de las variables por separado.

Intuitivamente, $\widehat{f}$ da el contenido que tiene la función de cada frecuencia. Por ejemplo, si queremos filtrar una señal de audio eliminando los agudos, deberíamos modificar $\widehat{f}$ para que sea nula para valores grandes. Resulta que se puede conseguir actuar sobre $\widehat{f}$ de manera sencilla operando sobre $f$. Dadas $f$ y $g$ se define su *convolución* $f * g$ en $\mathbb{Z}_N$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente como

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N} f(n-m)g(m), \qquad \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Un resultado fundamental es que en cualquiera de estos casos

$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Entonces multiplicar la transformada de Fourier por cierta función (por ejemplo para suprimir los agudos, como antes) equivale a convolver la función con una $g$ adecuada. Muchas veces se dice que cada $g$ que se usa para convolver, define un *filtro*.

En el caso de $\mathbb{Z}_N$ son muy comunes los filtros que corresponden a funciones nulas excepto en un número finito de puntos y a veces se representan mediante listas finitas (vectores). El caso bidimensional es especialmente relevante para el tratamiento de imágenes y se representa con matrices. Por ejemplo, consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La función $g$ que corresponde a $A$ vale 1 en el origen (el punto central) y 0 en el resto y cumple $f * g = f$, es decir, no tiene ninguna acción. La que corresponde a $B$ es constante en un cuadrado centrado (y cero en el resto) y el efecto de $f * g$ es que cada valor de $f$ queda promediado con sus valores en puntos adyacentes. Finalmente $C$ deja fijo el valor de $f$ en un punto siempre que en todos los adyacentes tenga el mismo valor, y cambia mucho este valor si hay grandes variaciones. Este tipo de filtros se utiliza para detectar bordes en imágenes. Los programas de retoque fotográfico incluyen diversos filtros de convolución (y otros que no lo son) para conseguir muchos efectos visuales.

El análisis de Fourier tanto discreto como continuo es un arma primordial en Matemáticas puras y aplicadas. En cierto modo permite que cualquier problema lineal que sepamos resolver con exponenciales complejas lo sepamos resolver para todas las funciones. Un ejemplo, es la ecuación del calor en $\mathbb{R}$

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Escribiendo $u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{u}(\xi,t)e(x\xi)\,d\xi$, y sustituyendo en la ecuación, se deduce la fórmula explícita $u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2t\xi^2}e(x\xi)\,d\xi$, que utilizando la propiedad de la convolución, se puede escribir también como $(4\pi t)^{-1/2}\int_R f(y)e^{-(x-y)^2/4t}\,dy$.

**Simetrías y decaimiento en los coeficientes de Fourier**

Pensemos en el caso clásico de series de Fourier, es decir, que tratamos con funciones de periodo uno. Escribiendo la fórmula para los coeficientes de Fourier con un cambio de variable

$$\widehat{f}(n)=\int_{-1/2}^{1/2}f(x)e(-nx)\,dx=\int_{-1/2}^{1/2}f(-x)e(nx)\,dx.$$

Si $f$ es par, esto da $\widehat{f}(-n)$ y si $f$ es impar, da $-\widehat{f}(-n)$. Sustituyendo en el desarrollo de Fourier, se deduce que para funciones pares hay un desarrollo sólo con cosenos y para funciones impares uno sólo con senos.

Por otro lado, si tenemos una función suficientemente regular sus coeficientes de Fourier decaerán muy rápido. Para convencerse de ello, basta integrar por partes sucesivas veces:

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi in}\int_{\mathbb{T}}f'(x)e(-nx)\,dx=\cdots=\frac{1}{(2\pi in)^k}\int_{\mathbb{T}}f^{(k)}(x)e(-nx)\,dx.$$

Es decir, si $f\in C^\infty$, entonces $\widehat{f}(n)$ multiplicado por cualquier potencia de $n$, tenderá a cero.

El decaimiento de $\widehat{f}$ también se aplica de alguna forma a $\mathbb{Z}_N$ y a $\mathbb{R}$ cuando la función no presenta variaciones abruptas. Esto significa que en esta situación nos podremos olvidar de gran parte de $\widehat{f}$ por ser casi nula, lo cual se traduce muchas veces en términos prácticos en una manera de comprimir la señal (veremos más adelante el caso del formato JPEG).

En las aplicaciones, a veces uno tiene una lista de $N$ datos que varían suavemente y quiere aplicar técnicas de análisis de Fourier pero el primer dato y el último son bien diferentes, entonces formar con ellos una función $f:\mathbb{Z}_N\longrightarrow\mathbb{C}$ da lugar a un salto abrupto. Una solución es simetrizar la función. Concretamente, se define $f_+:\mathbb{Z}_{2N}\longrightarrow\mathbb{C}$ con $f_+(n)=f(n)$ si $0\le n<N$ y $f_+(n)=f(2N-1-n)$ si $N\le n<2N$. Se puede interpretar esto diciendo que se ha hecho una simetría a través de $x=N-1/2$ o si se prefiere a través de $x=-1/2$. Esta simetría, de acuerdo con las ideas anteriores, sugiere que hay un desarrollo de Fourier en cosenos una vez que se hace la traslación $x\mapsto x+1/2$. Restringiéndose a los $N$ primeros valores, donde $f=f_+$, se puede probar que cualquier $f:\mathbb{Z}_N\longrightarrow\mathbb{C}$ se expresa como

$$f(n)=\frac{\widehat{f}_c(0)}{N}+\frac{2}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}\widehat{f}_c(m)\cos\big(\frac{\pi m}{N}(n+\frac{1}{2})\big)\quad\text{con}\quad\widehat{f}_c(n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}f(m)\cos\big(\frac{\pi n}{N}(m+\frac{1}{2})\big).$$

A $\widehat{f}_c$ se le llama *transformada coseno discreta* (DCT). Si $f(n)$ no presenta variaciones abruptas para $0\le n<N$, las ideas anteriores sugieren que los valores de $\widehat{f}_c(n)$ decaen.

**El formato JPEG**

Una imagen en tonos de gris en formato digital puede entenderse como una colección de pixels, distribuidos en forma rectangular y una forma de asignar a cada uno su valor (su tono de gris). El formato JPEG se concentra en cada bloque de $8 \times 8$ pixels y considera la asignación de los tonos de gris como

$$f : \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 255\}.$$

Aunque la imagen de $f$ está discretizada (los ordenadores sólo contemplan 256 tonos de gris distintos), matemáticamente es mejor pensar en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

La función asignada a cada bloque se desarrolla Fourier en cada variable usando la transformada coseno discreta. Es decir, se hallan números reales $\{a_{kl}\}_{k,l=0}^7$ tales que

$$f(n,m) = \sum_{k,l=0}^{7} a_{kl}\phi_{kl}(n,m) \qquad \text{con} \qquad \phi_{kl}(n,m) = \cos\big(\frac{\pi k}{16}(2n+1)\big)\cos\big(\frac{\pi l}{16}(2m+1)\big).$$

Por el decaimiento de los coeficientes de Fourier, para un bloque de una foto que no tenga saltos muy abruptos, los coeficientes con $k$ y $l$ mayor son pequeños y sustituirlos por cero no tiene gran efecto visual. En realidad se utiliza una *matriz de cuantificación* $Q$ de números enteros $(q_{kl})_{k,l=0}^7$, habitualmente la obtenida experimentalmente por los diseñadores del formato, que de alguna forma indica los umbrales para que el coeficiente $kl$ pueda sustituirse por 0 sin efectos visuales perceptibles. Matemáticamente se pasa de $a_{kl}$ a los enteros:

$$b_{kl} = q_{kl} \cdot \text{entero más próximo a } \frac{a_{kl}}{q_{kl}}.$$

Por ejemplo, la elección habitual de $Q$ tiene $q_{00} = 16$ y $q_{77} = 99$ por lo que $a_{00}$ se sustituirá por 0 para $|a_{00}| < 8$ mientras que $a_{77}$ lo hará siempre que $|a_{77}| \le 49$, lo cual será muy común porque la mayoría de los bloques de una foto normal serán gradaciones suaves de tonos de gris.

Un fichero JPEG es un fichero comprimido en el que se guardan estos coeficientes de Fourier modificados $b_{kl}$ (y algunos datos más en la cabera como las dimensiones de la foto o la matriz $Q$). Habrá 64 números por cada bloque, es decir, uno por pixel pero es de esperar que muchos (sobre todo los correspondientes a frecuencias altas) sean cero y también que muchos se repitan porque el proceso de *cuantificación*, como su nombre indica, limita los $b_{kl}$ a ciertos valores discretos.

Incluso sin saber nada de métodos de compresión de datos, parece lógico que un fichero que contiene símbolos que se repiten con gran frecuencia (probabilidad alta) será susceptible de comprimirse mucho. En el caso del formato JPEG, como ya se ha señalado, la cuantificación favorece estas repeticiones y sobre todo el número de ceros será muy grande. Es posible hacer un resultado matemático de los límites de la compresión en términos de las probabilidades de los símbolos.

El *source coding theorem* intuitivamente dice que una lista de $N$ elementos escogidos aleatoriamente de un conjunto de $K$ símbolos se puede comprimir aproximadamente hasta

$$N \sum_{k=1}^{K} p_k \log_2 p_k^{-1} \quad \text{bits,}$$

donde $p_k$ es la probabilidad con la que se escoge el símbolo $k$-ésimo y $\log_2$ representa el logaritmo en base 2.

A la cantidad en el sumatorio se le llama *entropía*. Es importante señalar que hay un método práctico (*codificación de Huffman*) que permite conseguir algo cercano a este límite de compresión. Notemos que en el caso extremo en que no haya ningún símbolo que se repita más, $p_k = 1/K$, el resultado da la cota $N \log_2 K$ que corresponde a no comprimir porque $\log_2 K$ son los bits que ocupa un símbolo. El otro caso extremo es si un símbolo aparece con probabilidad prácticamente 1, es decir, si el fichero consta de sólo un símbolo repetido, entonces la compresión es máxima y se podría reducir hasta casi cero bits.

Aquí nos hemos limitado al caso de tonos de gris pero el tratamiento del color no requiere grandes complicaciones. En principio lo natural sería repetir el esquema aquí indicado en cada uno de los canales de color RGB (rojo, verde, azul), aunque en la práctica se hace un pequeño cambio de coordenadas previo (se pasa de RGB a YCbCr) para reflejar el hecho de que no percibimos con la misma agudeza todas las combinaciones de los colores básicos.

**La transformada de Radon y las tomografías**

Un modelo razonable es que los rayos que atraviesan la muestra se atenúa proporcionalmente a la densidad $\rho$. Para el rayo $r_{\theta,t}$, experimentalmente obtendremos el valor de

$$P_\theta(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho$$

que se llama *transformada de Radon* (a veces con una normalización diferente) o, por razones obvias, *transformada de rayos $X$*. El análisis de Fourier permite recuperar la función $\rho$ a partir de $P_\theta(t)$, es decir, a partir de muchas (idealmente infinitas) radiografías, permite reconstruir la estructura interna de la muestra.

La fórmula relevante es

$$\rho(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r|\widehat{P_\theta}(r)e(xr\cos\theta + yr\cos\theta)\, drd\theta.$$

La prueba se basa en la fórmula $\widehat{\rho}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y)e(-rx\cos\theta - ry\operatorname{sen}\theta)\, dxdy$ y en interpretar que $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$ es la primera coordenada del vector $(x, y)$ girado un ángulo $-\theta$.

## Referencias

[DM72] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Academic Press, New York-London, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[Fou88] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur.* Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988. Reprint of the 1822 original.

[Kör88] T. W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.