Las ecuaciones de Maxwell

La formulación diferencial e integral

En 1873 J.C. Maxwell publicó su famosos "Tratado de electricidad y magnetismo" [Max54] que recogía en forma matemática algunas leyes experimentales conocidas. Aparte del interés fundamental de este tratado en Física, no es desdeñable su interés matemático histórico. Allí por ejemplo aparece una de las primeras demostraciones del teorema de Stokes, alcanzan protagonismo los operadores diferenciales divergencia y rotacional y se atisba el germen de lo que es el actual cálculo vectorial.

Estas leyes se pueden describir como unas ecuaciones diferenciales, llamadas *ecuaciones de Maxwell*, que deben satisfacer $\vec{E}$, la *intensidad de campo eléctrico* (fuerza por unidad de carga) y $\vec{B}$, la *inducción magnética*, que son dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dependientes del tiempo que representan los fenómenos electromagnéticos. En ausencia de cargas y corrientes, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E}=0,\qquad \operatorname{div}\vec{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\vec{B}=c^{-2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.}$$

Maxwell conjeturó que c era la velocidad de la luz, aunque esto no estaba muy claro en su tiempo. Todas estas ecuaciones derivan de su formulación integral, aplicando el teorema de la divergencia o de Stokes:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0,\quad \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0,\quad \int_C \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S},\quad \int_C \vec{B}\cdot d\vec{\sigma}=c^{-2}\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S},$$

donde en los dos primeros casos S es una superficie "cerrada" (frontera de una región sólida) y en los dos últimos S es una superficie con frontera dada por una curva C. En esta forma, la tercera ecuación, simplemente describe el experimento sencillo que da lugar a la dinamo: Si movemos un imán alrededor de una espira conductora, las cargas circularán y darán lugar a una corriente eléctrica. Cuanto más rápido movamos el imán y cuanto mas intensidad (flujo) pase por la espira, mayor será el efecto. La primera ecuación, en el caso estático, deriva de la *ley de Coulomb* $\vec{F}=Kqq'\vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ que da la fuerza entre dos cargas, una de ellas en el origen. La segunda representa que el campo magnético (en el caso estático) se comporta de forma similar aunque nadie escribe una ley de Coulomb porque no se han descubierto *monopolos magnéticos*, siempre las "cargas magnéticas" parecen venir en parejas (los dos polos de un imán). La última deriva de un argumento teórico para resolver cierta incongruencia en una ley experimental sencilla, en este sentido es la menos experimental porque c^{-2} es demasiado pequeño como para medirlo con experimentos del siglo XIX.

Las ondas electromagnéticas

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell es la existencia de las *ondas electromagnéticas*. En términos matemáticos, si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son campos vectoriales dependientes del tiempo que satisfacen las ecuaciones de Maxwell entonces cada una de sus componentes debe satisfacer la *ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

con Δ el *operador laplaciano*, $\Delta = \text{div } \nabla$. La demostración consiste en derivar con respecto al tiempo la segunda ecuación de Maxwell y sustituir la tercera para obtener

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -c^2 \text{rot rot } \vec{E}.$$

Después basta emplear la identidad $\Delta \vec{F} = \nabla\big(\text{div } \vec{F}\big) + \text{rot rot } \vec{F}$, válida para cualquier campo. El razonamiento para $\vec{B}$ es completamente análogo.

La ecuación de ondas sugiere que las ondas electromagnéticas se transmiten con velocidad c. Maxwell conjeturó que la luz era una onda electromagnética. La existencia de las ondas electromagnéticas fue finalmente probada bastantes años después por H. Hertz quien las produjo en su laboratorio [Her90]. Además Hertz contribuyó a la formulación actual de las ecuaciones de Maxwell.

En el ámbito clásico, a pesar de la similitud entre la ley de gravitación universal y la ley de Coulomb, hay una diferencia entre la fuerza gravitatoria y la eléctrica y es que la segunda no es instantánea. C.F. Gauss fue el primero en predecirlo aunque su teoría electromagnética no fuera la correcta y fue reformada por Maxwell.

Relación con la relatividad especial

La teoría especial de la relatividad fue obtenida tomando como base las ecuaciones de Maxwell. Su nacimiento se concreta en el famoso artículo de A. Einstein "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento" [Ein05] ([LEMW]). En pocas palabras, la cadena de ideas que lleva a la relatividad es que las ecuaciones de Maxwell parecen correctas y que intrínsecamente se aplican a observadores en movimiento (una carga eléctrica estática no genera campo magnético pero sí para un observador en movimiento, que la ve desplazarse). Sin embargo no son invariantes por los cambios de sistema de referencia entre observadores en movimiento. Por otro lado, el *experimento de Michelson-Morley* de finales del siglo XIX, sugería que la ecuación de ondas que se deriva de las ecuaciones de Maxwell era válida para todos los observadores inerciales.

Matemáticamente, con algunas hipótesis débiles adicionales y trabajando en una dimensión, se puede trasladar el problema de los cambios de mediciones de espacio y tiempo entre observadores a buscar las transformaciones lineales $(x,t) \mapsto (x',t')$ que dejan invariante la expresión $u_{tt} - c^2 u_{xx}$. Por medio de la regla de la cadena, despreciando cambios de orientación (cambios de signos relativos entre x y x' o t y t'), todas estas transformaciones son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & c \operatorname{senh} r \\ c^{-1} \operatorname{senh} r & \cosh r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Siguiendo a H. Minkowski [LEMW], pueden verse estas aplicaciones lineales como el grupo de movimientos directos cuando la "distancia" es $c^2t^2-x^2$. Cambiando las unidades para que $c=1$, son giros de ángulo complejo, en que las funciones trigonométricas son reemplazadas por las hiperbólicas. En particular forman un grupo.

Si $x'=0$ se tiene $x/t = c\,\mathrm{senh}\, r/\cosh r$. Físicamente esto corresponde a la velocidad relativa (un observador se ve a sí mismo en reposo y a otros con una velocidad relativa $x/t=$ espacio/tiempo). Escribiendo $v=c\,\mathrm{senh}\, r/\cosh r$, la fórmula matricial es

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix},$$

que despejando x' y t' da lugar a las famosas *transformaciones de Lorentz*:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Una consecuencia espectacular es que el tiempo es relativo al observador. Sin embargo, las cantidades v/c^2 y v^2/c^2 son tan sumamente próximas a 0 para las velocidad habituales, que esto es inapreciable.

H.A. Lorentz obtuvo las transformaciones anteriores antes que Einstein pero no llego a extraer todo el significado que se les da actualmente. En [Ein05] y en las exposiciones actuales se deducen de manera elemental sin referencia a la ecuación de ondas.

Es natural preguntarse en qué sentido son invariantes las ecuaciones de Maxwell por las transformaciones de Lorentz. Abreviando $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ y definiendo

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, & E_2' &= \gamma(E_2 - vB_3), & E_3' &= \gamma(E_3 + vB_3), \\ B_1' &= B_1, & B_2' &= \gamma(B_2 + vE_3/c^2), & B_3' &= \gamma(B_3 - vE_2/c^2), \end{aligned}$$

si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell con las variables (x,y,z,t) entonces $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ las satisfacen con las variables (x',y,z,t'), donde (x,t) y (x',t') están relacionadas por las transformaciones de Lorentz.

Físicamente, $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ serían los campos eléctrico y magnético que percibiría un observador a velocidad v por el eje OX.

La cuarta ecuación de Maxwell y el caso de cargas y corrientes

Si queremos aplicar la primera ecuación de Maxwell en un material cargado, hay que sustituirla por div $\vec{E}=\epsilon_0^{-1}\rho$ donde ϵ_0 es una constante (la *permitividad del vacío*) relacionada con la constante en la ley de Coulomb por $\epsilon_0^{-1}=4\pi K$). La razón es que, aplicando esta última, si S encierra el origen se tiene $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi K qq'$.

Es un hecho experimental que una corriente eléctrica crea un campo magnético con circulación proporcional a su intensidad. Ésta es la la *ley de Ampère*. La constante se denota con μ_0 (la *permeabilidad magnética del vacío*) y la intensidad indica el flujo de las cargas. Si la densidad de carga es ρ y $\vec{v}$ es el campo de velocidades de las cargas, entonces

$$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

que por el teorema de Stokes se reescribe en forma diferencial como

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \rho \vec{v}.$$

En ausencia de cargas esto daría rot $\vec{B} = \vec{0}$ que difiere de la cuarta ecuación de Maxwell. Lo que encontró incongruente Maxwell es que las cargas en una región sólida V sólo pueden perderse por la superficie frontera S, así pues

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho = -\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}, \qquad \text{que equivale a} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho\vec{v}).$$

Esto contradice la ley de Ampère en forma diferencial al tomar divergencias porque la divergencia del rotacional es siempre cero. Si hacemos la hipótesis de que a esta ley le falta un término muy pequeño, digamos rot $\vec{B} = \mu_0\rho\vec{v} + \Lambda$, para que todo sea coherente con div rot $\vec{B} = \vec{0}$, debe cumplirse div $\Lambda = \mu_0 \partial\rho/\partial t$. Teniendo en mente la primera ecuación de Maxwell en presencia de cargas, la elección natural es $\Lambda = \epsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ y se llega a la *ley de Ampère-Maxwell*

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\rho\vec{v} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Si no hay cargas, $\rho = 0$ y se obtiene la cuarta ecuación de Maxwell. Los valores de ϵ_0 y de μ_0 en tiempos de Maxwell así como de la velocidad de la luz eran imprecisos y no estaba clara la coincidencia entre $\epsilon_0\mu_0$ y c^{-2}.

Referencias

[Ein05] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[Her90] H. Hertz. *Las ondas electromagnéticas.* Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1990.

[LEMW] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The principle of relativity.* A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. Dover Publications Inc., New York, N. Y.

[Max54] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism.* Dover Publications Inc., New York, 1954. 3d ed, Two volumes bound as one.