Más sobre gravitación

Un problema experimental y otros teóricos

A mediados del siglo XIX mediciones muy precisas de la órbita de Mercurio sugirieron a U. Le Verrier una levísima discrepancia con los resultados teóricos derivados de las leyes de Newton. Ël mismo y otros científicos, achacaron esta diferencia a un hipotético planetoide desconocido (incluso algunos lo creyeron detectar). Con la llegada del siglo XX

- Identidad entre masa inercial y gravitatorio. Resulta extraño que por ejemplo cualquier objeto de masa despreciable en comparación con el Sol siga órbitas que no dependan de su masa. En nuestra experiencia diaria, siempre cuesta más cambiar la velocidad de masas mayores.
- Paradojas con las fórmulas básicas relativistas y cuánticas. Si la gravedad sólo afecta a la masa no debería actuar sobre los *fotones* (las partículas de luz) pero transformando alternativamente masas de partículas que caen por gravedad en fotones de la misma energía, con las fórmulas $E = h\nu$ y $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ se llegaría a producir energía de la nada.
- Principio de Mach. Newton argumentó que el espacio era absoluto porque el agua que se pega a las paredes de un cubo prueba que este gira. Según Mach el espacio es relativo porque la inercia está creada por la masa delas estrellas lejanas. El agua no se pegaría a las paredes si quitáramos todos los objetos del universo y por tanto toda posibilidad de establecer referencias. La gravedad y la inercia estarían relacionadas.

Hay muchos más detalles históricos en [MTW73].

La relatividad general

En lo que quizá sea su contribución más original, A. Einstein publicó en 1916 las ideas básicas de la relatividad general. En pocas palabras, postula que la gravedad no existe como fuerza sino que es una deformación geométrica del espacio-tiempo representada con una métrica diferente de la usual. La identidad entre masa inercial y gravitatoria es porque todos los objetos con una misma velocidad y espacio inicial siguen las mismas geodésicas.

La idea de que la mecánica se puede entender geométricamente existe ya en el ámbito clásico. Una partícula ligada a una superficie debe seguir geodésicas en ausencia de campos externos. La explicación es que si la derivada segunda no apuntase en la dirección normal (lo cual caracteriza a las geodésicas) entonces aceleraría la partícula desarrollando trabajo gratis.

H. Minkowski (que fue profesor de Einstein) encontró una manera geométrica elegante de entender la relatividad especial, definiendo el *espacio-tiempo*. Las transformaciones válidas en relatividad especial son las que dejan invariante la métrica $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, o si se prefiere la forma cuadrática $c^2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Dicho de otro modo, se identifican con los movimientos de $\mathbb{R}^4$ cuando se le dota con un producto escalar raro (en realidad no positivo), éste es el espacio-tiempo. Esta forma matemática de entender la relatividad especial al principio no agradó a Einstein, pero más adelante fue la clave para la relatividad general.

La gravedad se debe entender como una deformación de la *métrica de Minkowski* (con la misma signatura). A una variedad de dimensión 4 con una métrica de este tipo se le llama *variedad de Lorentz*. La correspondencia física y geométrica que postula la relatividad general está representada en este cuadro:

espacio-tiempo	$\longrightarrow$	variedad de Lorentz
gravedad	$\longrightarrow$	la métrica de la variedad
partículas materiales	$\longrightarrow$	geodésicas parametrizadas por longitud de arco
tiempo propio de una partícula	$\longrightarrow$	parámetro de la geodésica
rayos luminosos	$\longrightarrow$	geodésicas con longitud de arco nula

El *tiempo propio*, físicamente responde al tiempo que mediría un observador subido a una partícula.

Por ejemplo, para la métrica de Minkowski $c^2dt^2 - dx^2$, las geodésicas son de la forma $t(\lambda) = a_1\lambda + a_2$, $x(\lambda) = a_3\lambda + a_4$ y entonces al expresar x en función de t tenemos $x = v_0t + x_0$, la ecuación de movimiento en ausencia de fuerzas. Si $v_0 = c$ entonces $c^2 - (dx/dt)^2 = 0$ o equivalentemente $c^2dt^2 - dx^2 = 0$. Si ahora perturbamos la métrica, considerando por ejemplo $c^2e^{x^2}dt^2 - dx^2$, entonces las ecuaciones de las geodésicas llevan a $x'' + Kxe^{-x^2} = 0$ con K una constante positiva. Si $x(0) > 0$ y $x'(0) = 0$ que corresponde a una partícula en reposo a la derecha, entonces $x''(0) < 0$ y la partícula se acelerará hacia el origen. Por otro lado, si $x(0) < 0$ entonces $x''(0) > 0$ y también se acelerará hacia el origen. Un habitante de este universo podría pensar que en el origen hay un Sol que atrae a las partículas.

La métrica de Schwarzschild

La pregunta obvia e importante es cuál es la métrica que corresponde por ejemplo a la gravedad del Sol. Si escribimos en coordenadas esféricas la métrica de Minkowski se tiene

$$c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta d\phi^2.$$

La perturbación que correspondería a la gravedad ejercida por una única masa M fue calculada por K. Schwarzschild y consiste en introducir dos factores en dt^2 y en dr^2:

$$c^2\big(1 - r_0/r\big)dt^2 - \big(1 - r_0/r\big)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta d\phi^2$$

donde $r_0 = 2GM/c^2$ es el llamado *radio de Schwarzschild*.

Las geodésicas correspondientes a esta métrica se parecen en condiciones no extremas (velocidad, masas y distancias razonables) a las trayectorias que corresponden a la fórmula de Newton [Sch09, §7.2] [MTW73]. Por otro lado están de acuerdo con la curvatura observada de los rayos luminosos por efecto de la gravedad y por las anomalías de la órbita de Mercurio.

¿Cómo se obtuvo la *métrica de Schwarzschild*? Viene de las soluciones radiales de las llamadas *ecuaciones de campo* que establecen las condiciones que debe satisfacer una métrica para que corresponda a la gravedad. Una magnífica introducción muy asequible acerca de dónde salen y qué significan, está en [BB05].

Una propiedad extraña de la métrica de Schwarzschild es que tiene una singularidad en $r = r_0$ (¿gravedad infinita?) Einstein creyó que no tenía significado físico. Pensemos que por ejemplo para la Tierra y el Sol los valores de r_0 son $8.87mm$ y $2.96km$ con lo cual para ver la singularidad, deberíamos tener una masa como la de la Tierra en el tamaño de una canica o como la del Sol concentrada en una ciudad. Actualmente se tiene evidencia de que sí hay objetos astronómicos tan extremos en que la singularidad cae fuera de la superficie. En esa situación se dice que es un *agujero negro*.

Consideremos que desde $r = r_A$ parte una geodésica (una señal luminosa, una partícula) hacia r_B. Al sumarle una cantidad constante Δt a $t(\tau)$ tendremos también una geodésica que representa la misma señal emitida en otro tiempo. Para un observador estático ($r'(0) = 0$) en r_A se cumple $1 = (1 - r_0/r)\big(\frac{dt}{d\tau}(0)\big)^2$ y entonces si Δt es pequeño el intervalo $\Delta\tau_A$ (de tiempo propio) que medirá es, aproximando $dt/d\tau$ por $\Delta t/\Delta\tau_A$,

$$\Delta\tau_A = (1 - r_0/r_A)^{1/2}\Delta t.$$

Si razonamos de la misma forma con un observador en r_B deduciremos

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}}.$$

Esta fórmula implica que si un fenómeno oscilatorio ocurre en las cercanías de una gran masa gravitatoria, cuanto más lejos estemos menos frecuencia detectamos. En otras palabras, cerca de una masa (pero siempre por encima de r_0) el tiempo transcurre más lento.

Referencias

[BB05] J. C. Baez and E. F. Bunn. The meaning of Einstein's equation. *Amer. J. Phys.*, 73(7):644–652, 2005.

[MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.

[Sch09] B. F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.