Gravitación y las leyes de Kepler

Las leyes de Kepler

Las leyes de Kepler son unas leyes astronómicas empíricas dadas por Johannes Kepler en 1609 (la primera y la segunda) y en 1619 (la tercera), basándose en los datos compilados por Tycho Brahe.

- Primera ley. Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos.
- Segunda ley. La línea que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Tercera ley. El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

En tiempos de Kepler sólo se conocían 6 planetas. Excepto en el caso de Mercurio, las órbitas son casi circulares, lo que hace más notable el enunciado de sus leyes. Por otro lado, un vistazo a [Kep97] y a algunas de sus afirmaciones lo alejan del concepto actual que tenemos sobre un científico.

Esta leyes, como veremos, son "correctas" con el modelo matemático newtoniano sin tener en cuenta las perturbaciones debidas a la interacción entre los planetas y otros objetos del Sistema Solar, es decir, considerando sólo la atracción del Sol.

La ley de gravitación universal

La idea de que las masas ejercían una fuerza atractiva e incluso que dependía del inverso del cuadrado de la distancia, ya había sido aventurada por científicos contemporáneos de Isaac Newton. De hecho esta última parece deberse a su rival Robert Hooke que fue menospreciado por Newton en diferentes ocasiones. Una breve descripción de la contribución de Newton y de otros autores puede encontrarse en [Gri02].

El gran mérito de Newton fue demostrar que a partir de la *ley de gravitación universal*

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}$$

podían derivarse las leyes de Kepler y, teóricamente, describir exactamente los movimientos de los astros. Esto constituyó una revolución no sólo científica sino también filosófica.

Como hemos apuntado, consideramos sólo la acción debida a la masa M_S del Sol (los planetas tienen una masa comparativamente despreciable). Entonces si escribimos $\vec{x} = \vec{x}(t)$ para el vector que describe el planeta (visto desde el Sol) en función del tiempo t y recordamos $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{x}''$, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{x}'' = -\frac{GM_S}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x} \qquad \text{con} \qquad \vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

Esta ecuación implica (derivando) que $\vec{x} \times \vec{x}'$ es un vector constante (esto se llama *conservación del momento angular*) y, por supuesto, $\vec{x}$ es perpendicular a ese vector. Entonces las curvas descritas por $\vec{x}(t)$, las órbitas, son planas. Además la ecuación es invariante por giros y podemos suponer que dicho plano es $z = 0$. Con ello nos quedan dos funciones incógnita $x(t)$, $y(t)$. y la simetría radial sugiere hacer el cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Las ecuaciones, cambiando sólo el segundo miembro, serían:

$$x'' = -Kr^{-2}\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y'' = -Kr^{-2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde $K = GM_S$ es una constante (universal) positiva. En el sistema internacional, se tiene $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ y $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$. Calculando $x''\cos\theta + y''\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $x''\,\mathrm{sen}\,\theta - y''\cos\theta$, se llega a que estas ecuaciones equivalen a

$$(*) \qquad K = r^3(\theta')^2 - r^2 r'' \qquad \text{y} \qquad 0 = r\theta'' + 2r'\theta'$$

Recordemos que I. Newton fue uno de los inventores del cálculo infinitesimal. Sin embargo en su obra maestra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, para deducir las leyes de Kepler utilizó una formulación oscura para sus contemporáneos, y más aún en la actualidad, procediendo por combinación de argumentos geométricos y analíticos [New99].

Deducción de las leyes de Kepler

Las ecuaciones (*) no tiene soluciones explícitas $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ pero sí se puede probar que, sin atender a la dependencia en t (la parametrización de la curva), las órbitas son secciones cónicas y satisfacen las leyes de Kepler en el caso de los planetas.

La segunda ecuación de (*) se puede reescribir como $\frac{1}{2}\big(r^2\theta'\big)' = 0$ y esto implica que

$$r^2\theta' = h \qquad \text{con } h \text{ constante (dependiendo del planeta).}$$

De nuevo, en términos físicos, esto es proviene de la conservación del momento angular.

Ahora bien, el área barrida por una curva en polares entre el ángulo 0 y el ángulo θ es (cambio de variable o argumento geométrico):

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\alpha)\,d\alpha.$$

Si $A(t)$ es el área barrida por una solución de (*) en función del tiempo, se tiene, por la regla de la cadena:

$$A'(t) = \frac{1}{2}r^2\big(\theta(t)\big)\theta'(t) = \frac{1}{2}h.$$

Esto prueba la segunda ley de Kepler.

Teniendo en cuenta $r^2\theta' = h$, la primera ecuación de (*) es $K = h^2 r^{-1} - r^2 r''$, que tras el cambio $u(t) = 1/r(t)$ se escribe de manera más complicada como

$$Ku^2 = h^2u^3 - 2u^{-3}(u')^2 + u^{-2}u''.$$

Como hemos avanzado no hay soluciones explícitas de esta ecuación en función de tiempo. Escribamos U para indicar u como función de θ, es decir $u(t) = (U \circ \theta)(t)$. Por la regla de la cadena y usando que $\theta' = hu^2$ se tiene después de unos cuantos cálculos que la ecuación equivale a

$$U'' + U = -Kh^{-2}$$

Cuya solución general es $U(\theta) = Kh^{-2} + \mu \cos(\theta - \lambda)$. Cambiando el origen del ángulo en las coordenadas polares, podemos suponer $\lambda = 0$ y se tiene finalmente que, salvo rotaciones, las soluciones de (*) describen una curva en polares dada por

$$r(\theta) = \frac{h^2 K^{-1}}{1 + \lambda h^2 K^{-1} \cos\theta}.$$

Por otro lado, la ecuación de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en polares centradas en uno de sus focos es

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{donde} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Nótese que la *excentricidad* e cumple $0 \le e < 1$. Por tanto, siempre que $0 \le \lambda h^2 K^{-1} < 1$, como ocurre para todos los planetas, podremos ajustar los parámetros y se obtiene la primera ley de Kepler.

Digamos que T es el periodo orbital, entonces cuando $t \in [0, T]$ se recorre toda la elipse y se habrá barrido el área de toda ella, que según lo introducido en la deducción de la segunda ley de Kepler, es

$$A(T) = \frac{1}{2} \int_0^T r^2\big(\theta(t)\big)\theta'(t)\, dt = \frac{1}{2} Th.$$

Por otro lado, el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$. Comparando con el denominador de la fórmula para la órbita de un planeta, sabemos que $a(1-e^2) = h^2 K^{-1}$, entonces

$$\frac{1}{2} Th = \pi a^{3/2} h K^{-1/2}.$$

Cancelando la h y elevando al cuadrado se obtiene la tercera ley de Kepler porque K es una constante universal.

Referencias

[Gri02] J. Gribbin. *Historia de la Ciencia 1543–2001.* Crítica, 2002.

[Kep97] J. Kepler. *The Harmonies of the World.* American Philosophical Society, 1997.

[New99] I. Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy.* University of California Press, Berkeley, CA, 1999.