1. Prueba que si $\vec{x} = \vec{x}(t)$ es la ecuación de movimiento de un planeta, entonces las cantidades
$$\tfrac{1}{2}\|\vec{x}\,'\|^2 - GM\|\vec{x}\|^{-1} \quad \text{y} \quad \vec{x} \times \vec{x}\,' \qquad (M = \text{masa del Sol})$$
permanecen constantes. Prueba también que la órbita está contenida en un plano.

Resp: De la ley de Newton $\boxed{\vec{x}\,'' = -GM\,\vec{x}\,/\|\vec{x}\,\|^3}$ se deduce que:

(i) $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|\vec{x}\,'\|^2 = \vec{x}\,'\cdot\vec{x}\,'' = -GM\,\dfrac{\vec{x}\,'\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = GM\,\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$, luego la diferencia $\dfrac{\|\vec{x}\,'\|^2}{2} - \dfrac{GM}{\|\vec{x}\|}$ es constante;

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\vec{x}\times\vec{x}\,') = \vec{x}'\times\vec{x}\,' - GM\,\dfrac{\vec{x}\times\vec{x}}{\|\vec{x}\,\|^3}$; ambos sumandos son $= 0 \;\Rightarrow\;$ es constante el vector $\vec{x}\times\vec{x}\,'$,

que es *normal al plano osculador de la órbita*. Por eso ese plano tampoco varía con el tiempo, y contiene a toda la órbita.

---

2. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Un planeta va más rápido en el punto más cercano de su estrella o en el más lejano?

b) En la televisión vemos a los astronautas de la Estación Espacial Internacional flotar ingrávidos a pesar de estar sólo a 400 km de la Tierra. Esto es debido a la fuerza centrífuga que compensa a la gravedad. ¿Por qué el mismo argumento no se aplica para que nosotros flotemos ingrávidos cuando la Tierra gira alrededor del Sol?

Resp:

a) En esos dos puntos, el vector $\vec{x}\,'$ es normal al de posición $\vec{x}$ (con origen en la estrella), luego la *2a. Ley de Kepler:* $|\vec{x}\times\vec{x}\,'| = cte \;\Rightarrow\; |\vec{x}||\vec{x}\,'|$ es igual en ambos puntos $\Rightarrow$ más rápido en el más cercano.

b) Los astronautas "flotan" igual que nosotros, con una diferencia: la fuerza de atracción de la Tierra es *astronómicamente* mayor que la de la EEI, y el astronauta tardará media vida en "aterrizar" sobre la Estación (y a poco que empuje, alcanzará la "velocidad crítica" que le aleja para siempre de ella).

---

3. Encuentra una cadena de Markov con tres estados, en la que se pueda pasar de cualquier estado a cualquier otro en un número finito de pasos (se dice que es *ergódica*) pero tal que ninguna potencia de la matriz de probabilidades de transición tenga todos sus elementos estrictamente positivos (la cadena de Markov no es *regular*).

Resp: $V = \{1, 2, 3\}$, con *probabilidades de transición:* $p_{1,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = 1$; (el resto, 0).

---

4. Expresa la señal digital $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida mediante $f(1) = 2$, $f(3) = 1$, $f(0) = f(2) = 0$, como superposición (combinación lineal) de ondas $w_k(x) = e^{2\pi ikx/4}$.

Resp: La transformada de Fourier discreta es $\widehat{f}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_4} f(n)\overline{w}_k(n) = 2\overline{w}_k(1) + \overline{w}_k(3) = 2\mathbf{i}^{-k} + \mathbf{i}^k$.

La fórmula de inversión asegura que $f(x) = 4^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}_4}\widehat{f}(k)w_k(x)$.

Así se obtiene que $f(x)$ es: $\frac{3}{4}\,w_0(x) - \frac{1}{4}\mathbf{i}\,w_1(x) - \frac{3}{4}\,w_2(x) + \frac{1}{4}\mathbf{i}\,w_3(x)$.

---

5. Sea ρ la carga por unidad de volumen (densidad de carga). Explica por qué en Física se utiliza la relación $\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho\; d\mathrm{Vol} = -\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}}$ para expresar que la carga se conserva, donde $\vec{v}$ es la velocidad de las cargas en cada punto, y V es una región sólida con frontera la superficie S.

Aplicando el teorema de la divergencia, escríbela de forma que no involucre integrales.

Resp: Si ρ es la densidad de carga, $\int_V \rho\; d\mathrm{Vol}$ es la carga total en V.

Por otra parte, $\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$ es el flujo saliente de carga a través de la frontera (la cantidad de carga que la atraviesa por unidad de tiempo), formalmente porque $\dfrac{dq}{dV}\dfrac{d\vec{l}}{dt}\cdot d\vec{S} = \dfrac{dq}{dt}$. Entonces la fórmula dice que el incremento de carga en un volumen se debe a la entrada de cargas por la frontera.

Por el teorema de la divergencia $\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\; d\mathrm{Vol}$ y la fórmula se escribe como:

$\int_V \big(\rho_t + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\big)\; d\mathrm{Vol} = 0$. Como la región sólida V es arbitraria, esto equivale a $\rho_t + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$.

---

6. Tenemos una muestra con varios isótopos radiactivos, cada uno de los cuales se transforma en el siguiente:

$$S_1 \;\to\; S_2 \;\to \dots$$

Si $x_i(t)$ es la cantidad de S_i (número de esos átomos en tiempo t), y $\quad [x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$,

a) escribir la matriz R del sistema de EDs: $[x'(t)] = (R)[x(t)]$, explicando qué relación hay entre sus entradas y las *"half-life"* h_i de cada S_i ;

b) si $h_1 > h_2$, hay una "distribución estable" de esos 2 isótopos, es decir, una proporción x_1/x_2 a la que se acercarán esas cantidades de la muestra con el paso del tiempo; explicar cuál es.

Resp: $\quad R = \begin{pmatrix} -r_1 & \\ r_1 & -r_2 \end{pmatrix}$, donde : $r_i = \log(2)/h_i$, porque h_i es el tiempo que cumple:

$$\exp(-r_i h_i) = 1/2 \ .$$

Por lo tanto, $h_1 > h_2 \;\Rightarrow\; r_2 - r_1 > 0$, con lo que el autovector $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ de $\lambda = -r_1$, que genera el Ker de $R + r_1 I = \begin{pmatrix} 0 & \\ r_1 & r_1 - r_2 \end{pmatrix}$, tiene igual signo en sus 2 entradas:

$$r_1 a_1 + (r_1 - r_2)a_2 = 0 \;\Rightarrow\; a_1/a_2 = (r_2 - r_1)/r_1 = \frac{h_1}{h_2} - 1 > 0 \ .$$

Y las x_i tenderán a esa proporción a_1/a_2 , porque cada solución $\vec{x} = e^{-r_1 t}\,\vec{a} + e^{-r_2 t}\,\vec{b}$ del sistema, tiende asintóticamente a su primer sumando, por ser $\lambda = -r_1$ el mayor autovalor.

---

7. Para el grafo *bipartito completo* $K_{n,m}$, explicar **muy** brevemente qué condiciones sobre n, m equivalen:
   - a que haya un circuito que use una sola vez cada arista;
   - a que haya un circuito que visite una sola vez cada vértice.

Resp:

- El circuito que usa una sola vez cada arista ("euleriano"), existe sii cada vértice tiene grado par, que en este caso equivale a que sean: $n, m \in 2\mathbb{N}$;
- y el que visita una vez cada vértice ("hamiltoniano"), debe alternar entre las "dos orillas" de este grafo, luego si existe $\;\Rightarrow\; n = m$; y recíprocamente, como puede verse numerando de 1 a n los vértices de cada orilla para visitarlos en el orden de $\mathbb{Z}_n$.

. # MODELIZACION

23/ 6/ 14

ATENCION: Hay que entregar respuestas a 5 DE LOS 7 EJERCICIOS propuestos, ni 1 más; por eso es aún más necesario (que siempre) el **trabajar en sucio antes de copiar, limpio y ordenado**, a las hojas que se entregan. Escoja cada cual los que prefiera. Al entregar, tache los que no contestó y **compruebe que puso su nombre.**

---

1. Prueba que si $\vec{x} = \vec{x}(t)$ es la ecuación de movimiento de un planeta, entonces las cantidades

$$\tfrac{1}{2}\|\vec{x}\,'\|^2 - GM\|\vec{x}\|^{-1} \quad \text{y} \quad \vec{x} \times \vec{x}\,' \qquad (M = \text{masa del Sol})$$

permanecen constantes. Prueba también que la órbita está contenida en un plano.

---

2. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Un planeta va más rápido en el punto más cercano de su estrella o en el más lejano?

b) En la televisión vemos a los astronautas de la Estación Espacial Internacional flotar ingrávidos a pesar de estar sólo a 400 km de la Tierra. Esto es debido a la fuerza centrífuga que compensa a la gravedad. ¿Por qué el mismo argumento no se aplica para que nosotros flotemos ingrávidos cuando la Tierra gira alrededor del Sol?

---

3. Encuentra una cadena de Markov con tres estados, en la que se pueda pasar de cualquier estado a cualquier otro en un número finito de pasos (se dice que es *ergódica*) pero tal que ninguna potencia de la matriz de probabilidades de transición tenga todos sus elementos estrictamente positivos (la cadena de Markov no es *regular*).

---

4. Expresa la señal digital $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida mediante $f(1) = 2$, $f(3) = 1$, $f(0) = f(2) = 0$, como superposición (combinación lineal) de ondas $w_k(x) = e^{2\pi i k x/4}$.

---

5. Sea ρ la carga por unidad de volumen (densidad de carga). Explica por qué en Física se utiliza la relación $\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\text{Vol} = -\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}}$ para expresar que la carga se conserva, donde $\vec{v}$ es la velocidad de las cargas en cada punto, y V es una región sólida con frontera la superficie S.

Aplicando el teorema de la divergencia, escríbela de forma que no involucre integrales.

---

6. Tenemos una muestra con varios isótopos radiactivos, cada uno de los cuales se transforma en el siguiente:

$$S_1 \;\rightarrow\; S_2 \;\rightarrow \ldots$$

Si $x_i(t)$ es la cantidad de S_i (número de esos átomos en tiempo t), y $[x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$,

a) escribir la matriz R del sistema de EDs: $[x'(t)] = (R)[x(t)]$, explicando qué relación hay entre sus entradas y las *"half-life"* h_i de cada S_i ;

b) si $h_1 > h_2$, hay una "distribución estable" de esos 2 isótopos, es decir, una proporción x_1/x_2 a la que se acercarán esas cantidades de la muestra con el paso del tiempo; explicar cuál es.

---

7. Para el grafo *bipartito completo* $K_{n,m}$, explicar **muy** brevemente qué condiciones sobre n, m equivalen:
   - a que haya un circuito que use una sola vez cada arista;
   - a que haya un circuito que visite una sola vez cada vértice.