1) Explica por qué si $f : \mathbb{Z}_{2^k} \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces $f_p(n) = f(2n)$ y $f_i(n) = f(2n+1)$ se pueden considerar funciones $\mathbb{Z}_{2^{k-1}} \longrightarrow \mathbb{C}$ y satisfacen $\widehat{f}(n) = \widehat{f_p}(n) + e\big(-n/2^k\big)\widehat{f_i}(n)$. La iteración de esta fórmula da lugar a la importantísima FFT. Suponiendo los $e\big(n/2^k\big)$ conocidos de antemano, explica por qué esto ahorra operaciones al calcular $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{2^k}$.

2) Prueba la identidad de Parseval $N\sum_{n\in\mathbb{Z}_N}|f(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(n)|^2$ para $f : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$.

3) Un modelo natural para la temperatura en el interior de la Tierra a profundidad x (pequeña) es que $u(x,t)$ es periódica en t de periodo un año por efecto de las estaciones, y entonces $u(x,t) = \sum c_n(x)\ e(nt)$. Deduce $c_n(x) = a_n e^{-x(1\pm i)\sqrt{\pi|n|}}$ de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, suponiendo $u(+\infty,t) < \infty$, con a_n los coeficientes de Fourier de la temperatura en la superficie y $\pm$ el signo de n.

4) Halla $u(x,t)$ en el problema anterior cuando $u(0,t) = \lambda_0 + \operatorname{sen}(2\pi t)$ (verano es $t = 1/4$ e invierno $t = 3/4$). Deduce que las estaciones no actúan con la misma intensidad ni al mismo tiempo en la superficie que en el interior.

5) El principio de incertidumbre de la física cuántica se basa en que f y $\widehat{f}$ no pueden estar simultáneamente concentradas cerca del origen en $\mathbb{R}$. De hecho $4\pi\|xf\|_2\|\xi\widehat{f}\|_2 \ge \|f\|_2^2$ donde $\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}}|g|^2$. Sabiendo que $g = \widehat{g}$ para $g(x) = e^{-\pi x^2}$, prueba que la desigualdad es una igualdad si $f(x) = e^{-cx^2}$ con $c > 0$. Esto se relaciona con que las gaussianas den buenos filtros.

6) El filtro de convolución `sharpen` para imágenes se representa a veces con una matriz 3×3 cuyos elementos son -1, excepto el central que es 9. Intenta adivinar su efecto visual.

7) Si en una imagen en formato JPG hacemos cero todos los coeficientes de Fourier excepto los a_{00} que corresponden a la función ϕ_{00}, ¿qué ocurrirá?

8) Halla los coeficientes de una imagen JPG que consta sólo de la recta vertical $x = 0$ de anchura un pixel, tratando de expresarlos de manera lo más simple posible.

9) Una imagen JPG que consta de una línea horizontal negra gruesa de lado a lado en un fondo blanco no es invariante por traslaciones; es decir, el tamaño del fichero depende de la altura a la que esté la línea. Explica este fenómeno.

10) Explica por qué si se sabe que la densidad es una función es radial, entonces basta una proyección para reconstruirla por tomografía. Demuestra que en este caso una fórmula para hacerlo es $\rho(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}|r|\widehat{P_0}(r)e(r\cos\theta\ \sqrt{x^2+y^2})\ d\theta dr$.

11) Halla $P_0(t)$ y $\widehat{P_0}(t)$ para una muestra con sección $[-2,2]^2 - [-1,1]^2$ de densidad 1.

12) Deduce fórmulas matemáticas para lo que se obtendría al hacer tomografías transversales de: *a)* Una barra homogénea de densidad 1 y radio 1; *b)* esta barra vaciada hasta radio 1/2; *c)* el resultado de rellenar el hueco central con un material de densidad 2.