1) La electrostática corresponde a las soluciones de las ecuaciones de Maxwell con $\vec{B} = \vec{0}$. Explica por qué en ese caso existe un potencial ϕ con $\vec{E} = -\nabla\phi$ y demuestra que si ϕ es una función radial en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ entonces $\vec{E}$ es, salvo constantes, como la fuerza de Coulomb.

2) Se suele escribir $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ y $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ donde ϕ y $\vec{A}$, llamados *potencial escalar* y *potencial vectorial*, verifican $c^2\text{div}\vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$. Prueba que $\Box\vec{F} = \vec{0}$ donde $\vec{F}$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por $\vec{F} = (c^{-1}\phi, \vec{A})$ y $\Box = c^2\Delta - \partial^2/\partial t^2$.

3) En presencia de una distribución continua de cargas, la primera ecuación de Maxwell debe modificarse a $\text{div}\vec{E} = \epsilon_0^{-1}\rho$ donde ϵ_0 es una constante y ρ es la densidad de carga (carga por unidad de volumen). Explica por qué en ese caso $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0^{-1}Q$ donde Q es la carga total encerrada por la superficie cerrada S. Explica también por qué la relación $\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\text{Vol} = -\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$ se conoce con el nombre de "ley de conservación de la carga" donde $\vec{v}$ es la velocidad de las cargas en cada punto, y V es la región interior a S.

4) Supongamos que $E_3 = 0$ y que E_1 y E_2 no dependen de la variable z. Demuestra que si en algún instante B_1 y B_2 se anulan, entonces se anulan para todo tiempo.

5) Sea G un giro de ángulo α alrededor de uno de los ejes. Prueba que si $\vec{E}$ verifica la primera ecuación de Maxwell entonces $G \circ \vec{E} \circ G^{-1}$ también lo hace. Trata de explicar el significado físico.

6) Escoge una solución polinómica $u = u(x,t)$ no lineal ($u \neq ax + bt + c$) de la ecuación de ondas unidimensional $c^2u_{xx} - u_{tt} = 0$ y comprueba que tras la transformación de Lorentz $(x,t) \mapsto \big(\gamma(x - vt), \gamma(t - vx/c^2)\big)$ con $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ sigue siendo solución.

7) Sea $\phi \in C_0^2$ y $\vec{n}$ un vector unitario. Comprueba que $u(\vec{x},t) = \phi(ct - \vec{n}\cdot\vec{x})$ es solución de la ecuación de ondas. Explica por qué se dice que ésta es una *onda plana*.

8) Halla todas las ondas esféricas estacionarias, es decir, las soluciones de la ecuación de ondas en $\big(\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}\big) \times \mathbb{R}$ de la forma $u(\vec{x},t) = f(\|\vec{x}\|)\sin(\nu t)$ con ν una constante.

9) En principio uno podría pensar que la ley de Coulomb es también cierta para cargas con velocidad $\vec{v}$ constante, esto es, $\vec{E} = Kq(\vec{x} - t\vec{v})/\|\vec{x} - t\vec{v}\|^3$. Es un hecho experimental (e intuitivo) sencillo que para estas cargas el campo magnético no es constante. Deduce que la ley de Coulomb no es cierta para ellas.

10) Para una carga con velocidad v a lo largo del eje OX se cumple $\vec{E} = (x - vt, y, z)\Lambda$ y $\vec{B} = vc^{-2}(0, -z, y)\Lambda$ donde $\Lambda = K\gamma q\|(\gamma(x - vt), y, z)\|^{-3}$ con $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Escoge una de las ecuaciones de Maxwell y comprueba que se satisface fuera del punto singular $(vt, 0, 0)$. ¿A qué velocidad tendría que ir una carga para que notásemos una diferencia del 1 % al aplicar (incorrectamente) la ley de Coulomb en el eje X en el caso de cargas en movimiento?