$GM = 1.33 \cdot 10^{20} m^3 s^{-2}$ con M la masa del Sol. Radio de la Tierra $= 6.38 \cdot 10^6 m$

1) Una *fuerza central* es una fuerza que en $\vec{x}$ tiene módulo que sólo depende de $\|\vec{x}\|$ y apunta en la dirección $\vec{x}$. Por tanto $\vec{F} = m\vec{a}$ lleva a una ecuación del tipo $\vec{x}'' = g(\|\vec{x}\|)\vec{x}$. Calcula la derivada de $\vec{x} \times \vec{x}'$ (el momento angular) y deduce de ello que cada curva solución está contenida en un plano.

2) La estación espacial internacional orbita a unos $400km$ de la superficie de la Tierra. Calcula en qué proporción ha disminuido la fuerza de la gravedad a esa altura. ¿Cuánto pesaría una persona de $80kg$ a esa altura? ¿Por qué entonces las imágenes que nos llegan muestran astronautas y objetos flotando ingrávidos?

3) Prueba que la curva en polares $r(\theta) = a^{-1}b^2(1 + e\cos\theta)^{-1}$, con $e = c/a = \sqrt{1 - a^{-2}b^2}$ describe la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ cuando el origen de las coordenadas polares está en uno de los focos. Prueba también que la curva en polares $r(\theta) = L(1 + e\cos\theta)^{-1}$, con $e \geq 0$ y $L > 0$ constantes, describe una circunferencia si $e = 0$, una elipse si $0 < e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$. *Indicación*: Escribe $r(1 + e\cos\theta)$ en cartesianas.

4) Prueba que $\frac{1}{2}\|\vec{x}'\|^2 - GM\|\vec{x}\|^{-1}$ (la energía) es constante en la órbita de cada planeta.

5) Recuerda que en el movimiento de un planeta $h = r^2\theta'$ es constante y que $a(1 - e^2) = h^2/GM$ con a el semieje mayor y e la excentricidad. Explica por qué en el punto más cercano al Sol de la órbita de un planeta, digamos a distancia r_p, la velocidad v_p debe cumplir $v_p = r_p\theta'$. Deduce de ello que $v_p = br_p^{-1}\sqrt{GM/a}$.

6) Prueba que si el semieje mayor de la elipse de un planeta es a entonces su velocidad cuando está a distancia r del Sol es $\sqrt{2GM/r - GM/a}$. *Indicación*: Utiliza los dos problemas anteriores.

7) Usando la ley de Gauss, prueba que en un planeta que un planeta esférico homogéneo hueco no hay gravedad en el interior.

8) Newton resolvió el problema anterior con un bello argumento geométrico: Fijado un punto interior se considera un doble cono que lo tiene como vértice. El cono corta a la superficie interior del planeta en dos regiones que cuando se reducen a tamaño infinitesimal ejercen la misma atracción. Intenta elaborar este argumento hasta que te suene convincente.

9) En "intervalolandia" el espacio tiempo es $(t, x) = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ y tiene la métrica definida por $(1 - x^2)^{-1}\, dt^2 - dx^2$. ¿Que ocurriría con una partícula que se deja en el instante inicial en reposo en $x = x_0$? Calcula la geodésica con $x(0) = x_0$ y $x'(0) = t(0) = 0$.

10) Si mides $1.75m$, y te has pasado toda la vida de pie sobre la Tierra ($r_0 = 8.87 \cdot 10^{-3}m$) y tu cabeza tiene exactamente 21 años; estudia si, según la relatividad general, tus pies son más o menos jóvenes que tu cabeza y aproxima la diferencia de edad. Desprecia la influencia del crecimiento, la rotación de la Tierra y los efectos gravitatorios externos.