Antes de nada, insistir, como dije en clase en que yo no he logrado resolver este reto. Es decir, mis cálculos no concuerdan con el experimento, por tanto las indicaciones que doy pueden no ser adecuadas e intentaré que sean lo más genéricas posibles para no despistar a nadie.

1. Planteamiento

El problema consiste en dar una explicación matemática del equilibrio de latas de 33cl que concuerde con el experimento.

Recomiendo a todos, incluso a los que han estado en la clase en que se hizo el experimento, que para entender el problema y recopilar algunos datos, revisen los siguientes enlaces:

- Vídeo *¿En qué me he equivocado?* en openmat[1]

  `http://www.uam.es/otros/openmat/videos/videos.html`

- Fotos y datos de algunos de los primeros experimentos que hice[2]

  `http://www.uam.es/fernando.chamizo/oscuro/latas.html`

Lo que más me sorprende es la estabilidad en la cantidad de líquido que tiene la lata y, sobre todo, lo crítica que es la altura de la lata. No parece poder conseguirse el equilibrio con latas ligeramente más largas. La inestabilidad en la altura no pertenece estrictamente al problema pero una vez que el modelo explique el equilibro en el rango de cantidad de líquido que resulta del experimento, debería ser fácil simplemente modificando un parámetro.

2. La ley física del equilibrio

Lo que tiene que ocurrir para que un objeto esté en equilibrio es que el centro de gravedad esté sobre la base de sustentación. El centro de gravedad es el punto en el que se concentra toda la masa, en el sentido de que es el que da la resultante (suma, integral) de todos los vectores peso de los trocitos infinitesimales que componen un objeto.

[1] Allí también está el vídeo *velocidad terminal* con el experimento hecho en clase sobre la ley de Faraday. El resto de los vídeos también puede ser de interés (mis favoritos son $C + V = A + 2$ y *El problema de Josefo*, de Carlos Vinuesa).

[2] Hay también una versión en inglés en `http://www.uam.es/fernando.chamizo/oscuro/cans.html`

En sistemas formados por unas cuantas masas puntuales $\{m_j\}_{j=1}^N$ en las posiciones $\{x_j\}_{j=1}^N$, el centro de gravedad (y centro de masas) es la media ponderada:

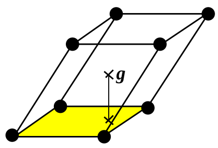
$$g = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{x}_j \qquad \text{con} \qquad M = \sum_j m_j.$$

En el caso continuo, es:

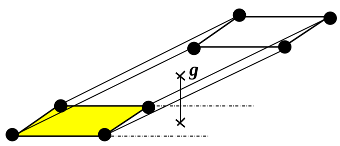
$$g = \frac{1}{M}\iiint_V (x,y,z)\rho\, dxdydz \qquad \text{con} \qquad M = \iiint_V \rho\, dxdydz$$

donde la integral triple se hace coordenada a coordenada, V es el volumen considerado y ρ es la densidad en cada punto. De esta forma, M es la masa total.

Para entender la idea, pensemos en el esqueleto de un paralelepípedo $\mathcal{P}$ hecho de alambre sin masa con vértices en $(\pm 1, \pm 1, 0)$ y $(\pm 1, k \pm 1, 2)$ y que añadimos unas masas unitarias en los vértices. El promedio de los vértices inferiores es $(0,0,0)$ y eso significa que es como si el peso fuera un vector de longitud 4 hacia abajo aplicado en el $(0,0,0)$. Arriba estará este mismo vector ahora aplicado sobre $(0,k,2)$. En total, el peso se representa como un vector de longitud 8 hacia abajo sobre el punto $g = (0, k/2, 1)$, el promedio de ambos. Este g, promedio de las posiciones de todas las masas, es el centro de gravedad. La condición para que esté en equilibrio cuando apoyamos $\mathcal{P}$ sobre la mesa $z = 0$, es que su proyección esté en el cuadrado $(\pm 1, \pm 1, 0)$, esto es, $|k| \leq 2$.



Equilibrio



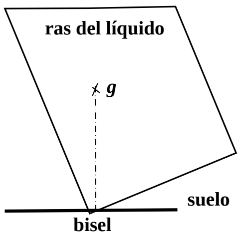
Inestabilidad

3. Cómo lo hice

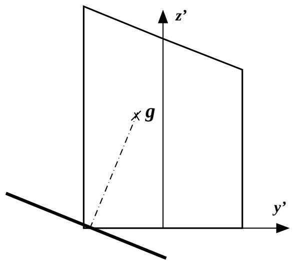
Recuerdo una vez más que no me ha salido, por tanto hay que tomar con precaución los comentarios siguientes.

Medí aproximadamente el ángulo de equilibrio. Esto se puede hacer con la lata en equilibrio o con ella vacía apoyándola sobre el bisel. En la práctica hallé el ángulo a través de la tangente, midiendo la altura y la separación de la vertical al bisel. Requiere una mínima ingeniería pero a prueba de manazas.

Después calculé el centro de gravedad del líquido en función de la cantidad que haya de él, suponiendo la posición de equilibrio. Ésta es la parte matemática (¿bonita? en realidad un poco pesada). La densidad del agua, cerveza, refresco, es con gran aproximación $1g/cm^3$. Se puede considerar que el líquido cubre toda la parte inferior de la lata para no hacer dos casos (aunque hay también equilibrio en casos en que no la cubre del todo). Aquí y en lo sucesivo me pareció mucho más simple escribir todo en relación a un sistema de referencia cuyo eje z sea paralelola arista de la lata (en la posición de equilibrio).



En el sistema natural



En mi sistema de referencia

Después calculé el centro de gravedad de la lata. Esto es experimental. Se puede colgar la lata de varios puntos o hacer algunas cuentas con lo que pesa la parte de arriba y la de abajo de la lata pues allí está casi toda la masa[3]. Esto último fue lo que hice para depender menos del experimento y mis manazas. Una referencia es: *Hosford, W. F. and J. L. Duncan.* The Aluminum Beverage Can.*Scientific American, September 1994, pp. 48-53*, que puede encontrarse en la red. A pesar de que es antiguo, parece corresponder a las latas modernas.

Para obtener el centro de gravedad total sólo hay que promediar el de la lata y el del líquido, cada uno con su masa.

Finalmente, proyecté el centro de gravedad sobre $z = 0$ (como yo usaba otro sistema de referencia no era exactamente así) y puse la condición de que cayera en la anchura del bisel, que es aproximadamente de $1.1cm$.

Ya he anunciado el resultado: lo que me sale no cuadra con el experimento. Puede que sea sólo un error de cuentas, porque los cálculos son tediosos, pero me extraña porque no me veo explicación al efecto tan crítico de la altura de la lata.

[3]Una cosa que sólo recordarán los más viejos del lugar, es que las primeras latas que aparecieron, al menos en el mercado español, tenían mucho más metal en la parte lateral y eran difíciles de estrujar como se hace ahora sin esfuerzo.