POSIBLES RESPUESTAS a los problemas del 12/ 5/ 14

---

1. La letra del DNI está unívocamente determinada por el número (que tiene 8 dígitos) módulo 23. ¿Pueden tener la misma letra dos DNIs que sólo difieren en que hay dos dígitos intercambiados?

   RESP:
   Si los dígitos intercambiados son $a > b$ y están en los "lugares" r y s ($r \neq s$), los números de los DNIs serían de la forma: $n + 10^r a + 10^s b$ y $n + 10^r b + 10^s a$; entonces hay que ver si puede ocurrir que $10^r a + 10^s b \equiv 10^r b + 10^s a \pmod{23}$. Dividiendo entre una potencia de 10, esto se escribe como $10^k (a - b) \equiv a - b \pmod{23}$ para $k = |r - s| < 8$. Como $a - b$ y 23 son coprimos (23 es primo), esto equivale a que 10 tenga orden menor que 8 módulo 23.
   Con un cálculo, se ve que esto no es cierto. Lo más fácil para simplificar el cálculo es notar que $\varphi(23) = 22$ y por tanto 10 sólo podría tener orden 2, 11 ó 22, pero $10^2 \not\equiv 1 \pmod{23}$.

---

2. Consideremos las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{div}\,\vec{E} = 0, \qquad \text{div}\,\vec{B} = 0, \qquad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot}\,\vec{B} = c^{-2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

   Prueba que todas las soluciones de la forma $\vec{E} = (f(x,t), g(x,t), 0)$, $\vec{B} = (0, 0, h(x,t))$, cumplen que f es constante. Demuestra con detalle que g y h satisfacen la ecuación de ondas unidimensional $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

   RESP:
   Con las expresiones del enunciado para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se tiene div $\vec{E} = f_x$ y tras un cálculo sencillo, rot $\vec{E} = (0, 0, g_x)$ y rot $\vec{B} = (0, -h_x, 0)$. La primera y la cuarta ecuaciones de Maxwell se traducen en: $f_x = 0$ y $\big(0, -c^2 h_x, 0\big) = \big(f_t, g_t, 0\big)$.
   De aquí, $f_x = f_t = 0$. Es decir, f no depende de x ni de t y por tanto es constante.
   Teniendo en cuenta el apartado anterior, la tercera y la cuarta ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como $\big(0, 0, g_x\big) = \big(0, 0, -h_t\big)$ y $\big(0, -c^2 h_x, 0\big) = \big(0, g_t, 0\big)$.
   Derivando alternativamente la ecuación $g_x = -h_t$ con respecto de x y de t, y sustituyendo $-c^2 h_x = g_t$, se obtienen las ecuaciones de ondas buscadas.

---

3. Una hormiga camina por los vértices $ABCD$ de un tetraedro (pirámide triangular) donde ABC es la base y D es el vértice superior. Cuando está en la base, avanza en sentido horario, con probabilidad $2/3$, o sube al vértice D, con probabilidad $1/3$. Una vez en D, baja con igual probabilidad a A, B ó C.
   • Demostrar que existe una distribución límite, y hallarla.
   • Hallar el número medio de aristas que recorrerá entre dos visitas sucesivas al vértice D .

   RESP:
   • *La matriz de* probabilidades de transición *entre los vértices A, B, C, D, es:* $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} . & 2 & . & 1 \\ . & . & 2 & 1 \\ 2 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . \end{bmatrix}$
   y se llega en dos pasos desde cada vértice a los 4, luego hay distribución límite*; que es $u/4$ con $u = (1,1,1,1)$, puesto que se cumple: $uP = u$.*
   • *Luego la frecuencia media de visitas a D es 1/4: en media, 4 aristas entre cada 2 visitas.*

---

4. Se están haciendo observaciones sucesivas de una variable aleatoria ξ , que cada vez puede tomar, independientemente de las observaciones anteriores, los valores $0, 1, 2, 3$, con las siguientes:

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{P}(\xi = k) = & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ \textit{si } k = & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

   Si llamamos X_n al *mayor valor de* ξ *hasta la observación* n , las X_n forman una Cadena de Markov.
   • Hallar la matriz de $\mathbb{P}$ de transición de esa Cadena.
   • Hallar el valor esperado del número de observaciones hasta llegar a un $X_n = 3$.

   RESP:
   • $\mathbb{P}(X_n = X_{n-1}) = \mathbb{P}(\xi \leq X_{n-1})$, *luego* $P = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ . & 4 & 4 & 2 \\ . & . & 8 & 2 \\ . & . & . & 10 \end{bmatrix}$
   • "hasta llegar a un $X_n = 3$" *es lo mismo que* "hasta que salga un $\xi = 3$", *luego ese valor esperado es:* $\mathbb{E}[Geom_{\,0.2}] = 5$.

---

5. Suponer que, en cierto sistema de coordenadas con su origen fijado en una estrella, las trayectorias de dos planetas tienen su *perihelio* en un mismo punto P (sin ser la misma trayectoria).
   - ¿Pueden tener ambas trayectorias algún otro punto común, si están en el mismo plano?
   - Si la del planeta V es casi circular (y la otra no), ¿cuál de los dos pasa por P con mayor rapidez?

   RESP:

   • *Si colocamos en la estrella el origen y en el perihelio común la coordenada* $\theta = 0$ *, ambas trayectorias tendrán la forma:* $r = \alpha_i/(1+\varepsilon_i \cos(\theta))$ *, con:* $\alpha_1/(1+\varepsilon_1) = \alpha_2/(1+\varepsilon_2)$ *si coinciden los perihelios, pero* $\alpha_1 \neq \alpha_2$ *si no son la misma trayectoria; luego la ecuación*
   $$\alpha_1(1+\varepsilon_2\cos(\theta)) = \alpha_2(1+\varepsilon_1\cos(\theta)) \text{ , es decir, } (\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1)\cos(\theta) = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ ,}$$
   lineal en $\cos(\theta)$ *, no tendrá más soluciones que* $\cos(\theta) = 1$ *.*

   • *Pasará más rápido por el perihelio el que tenga mayor* velocidad areolar dA/dt *; para cada uno de ellos, esa velocidad (= cte.,* 2a. ley de Kepler*) será* $= A/T$ *, donde* T *es el período de la órbita y el área de la elipse es* $A = \pi ab$ *, con* a, b *sus semiejes; con la distancia* p *del foco al perihelio (vértice común), ambas cumplirán:* $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + (a-p)^2$ *, luego* $b^2 = 2ap - p^2$ *; y usando la* 3a. ley de Kepler: $T^2 = cte \cdot a^3$*, resulta:*
   $$(A/T)^2 = cte \cdot b^2/a = cte \cdot (2p - p^2/a) \text{ , que es función creciente de } a\text{:}$$
   el de la trayectoria más alargada pasa más rápido por ese punto.

---

6. Si la función $N(t)$ es solución de la ecuación logística $N' = rN(1 - N/K)$,
   - ¿cuánto vale el parámetro r si N ha tardado 6 *horas* en *subir del valor* $K/3$ *al valor actual* $K/2$?
   - Y ¿cuánto valdrá N cuando pasen 12 *horas* más?

   RESP: *Como* r, K *son sólo* factores de escala *para* t, N*, basta responder las preguntas para la solución* $\tau = \log(N/(1-N))$ *de la "logística standard"* $dN/d\tau = N(1-N)$ *:*

   • *tarda* $\tau_1 - \tau_0 = \log(1) - \log(1/2) = \log(2)$ *en subir de* 1/3 *a* 1/2 *, luego* $r = \dfrac{\log(2)}{6}$*/hora ;*

   • *en* $\tau_2 = 2\log(2)$ *, será* $\log(N/(1-N)) = \log(4)$ *, luego reescalando,* $N = \dfrac{4}{5}K$ *.*

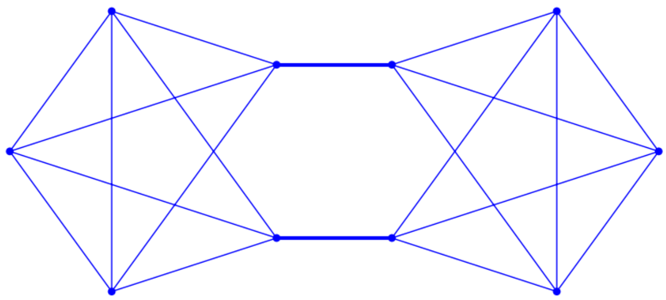
---

7. Si el conjunto $E \neq \emptyset$ de aristas de un grafo se puede partir en unión disjunta de ciclos de Hamilton, probar que el grafo es *conexo, con todos los vértices de un mismo grado par.*
   ¿Es cierto el recíproco? Probar que sí, o dar un contraejemplo.

   RESP:

   • *Es conexo porque hay al menos un ciclo de Hamilton; y si* E *se parte en* m *de ellos, cada uno usa* 2 *aristas por vértice, luego el grafo es* 2m*-regular.*

   • *NO: si en la unión no conexa de dos* K_5 *suprimimos en cada uno una arista:* $(a,b), (a',b')$*, pero añadimos las dos aristas* $(a,a'), (b,b')$*, el grafo que resulta es conexo y todavía* 4*-regular, pero cada ciclo de Hamilton necesita usar esos dos "puentes".*



.

MODELIZACION

12/ 5/ 14

ATENCION: Hay que entregar respuestas a 5 DE LOS 7 EJERCICIOS propuestos, ni 1 más; por eso es aún más necesario (que siempre) el **trabajar en sucio antes de copiar, limpio y ordenado, a la hoja que se entrega.** Los 5 primeros responden a lo visto en el grupo 731, los 5 últimos a lo del 740, pero escoja cada cual los que prefiera.

---

1. La letra del DNI está unívocamente determinada por el número (que tiene 8 dígitos) módulo 23. ¿Pueden tener la misma letra dos DNIs que sólo difieren en que hay dos dígitos intercambiados?

---

2. Consideremos las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \qquad \text{div } \vec{B} = 0, \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{rot } \vec{B} = c^{-2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

   Prueba que todas las soluciones de la forma $\vec{E} = (f(x,t), g(x,t), 0)$, $\vec{B} = (0, 0, h(x,t))$, cumplen que f es constante. Demuestra con detalle que g y h satisfacen la ecuación de ondas unidimensional $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

---

3. Una hormiga camina por los vértices $ABCD$ de un tetraedro (pirámide triangular) donde ABC es la base y D es el vértice superior. Cuando está en la base, avanza en sentido horario, con probabilidad $2/3$, o sube al vértice D, con probabilidad $1/3$. Una vez en D, baja con igual probabilidad a A, B ó C.

   Demostrar que existe una *distribución límite*, y hallarla.
   Hallar el número medio de aristas que recorrerá entre dos visitas sucesivas al vértice D .

---

4. Se están haciendo observaciones sucesivas de una variable aleatoria ξ , que cada vez puede tomar, independientemente de las observaciones anteriores, los valores $0, 1, 2, 3$, con las siguientes:

$\mathbb{P}(\xi = k) =$	0.3	0.1	0.4	0.2
si $k =$	0	1	2	3

   Si llamamos X_n al *mayor valor de ξ hasta la observación n* , las X_n forman una Cadena de Markov.

   Hallar la matriz de *probabilidades de transición* de esa Cadena.
   Hallar el valor esperado del *número de observaciones hasta llegar a un $X_n = 3$* .

---

5. Suponer que, en cierto sistema de coordenadas con su origen fijado en una estrella, las trayectorias de dos planetas tienen su *perihelio* en un mismo punto P (sin ser la misma trayectoria).

   ¿Pueden tener ambas trayectorias algún otro punto común, si están en el mismo plano?
   Si la del planeta V es casi circular (y la otra no), ¿cuál de los dos pasa por P con mayor rapidez?

---

6. Si la función $N(t)$ es solución de la ecuación logística $N' = rN(1 - N/K)$,

   ¿cuánto vale el parámetro r si N ha tardado 6 *horas* en *subir del valor $K/3$ al valor actual $K/2$* ?
   Y ¿cuánto valdrá N cuando pasen 12 *horas* más?

---

7. Si el conjunto $E \neq \emptyset$ de aristas de un grafo se puede partir en unión disjunta de ciclos de Hamilton, probar que el grafo es *conexo, con todos los vértices de un mismo grado par.*
   ¿Es cierto el recíproco? Probar que sí, o dar un contraejemplo.

ANTES DE ENTREGAR, asegúrate de haber puesto tu nombre;
si ENTONCES (no antes) tachas los que **no has contestado,** pues muchas gracias.