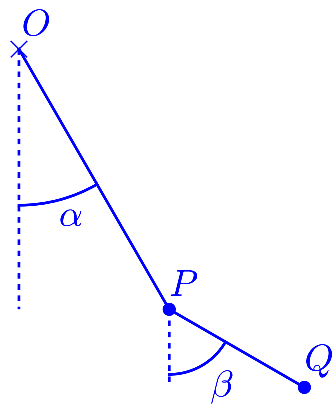
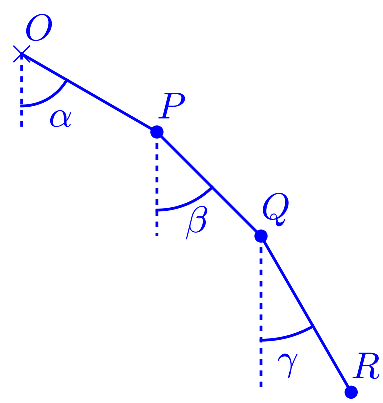
Bases de geometría diferencial

El concepto de variedad con un ejemplo mecánico

Una variedad diferenciable es un objeto n dimensional en el que podemos hacer análisis (derivar e integrar). Es la generalización de curvas y superficies a cualquier número de dimensiones. La novedad es que en la definición de variedad se esquiva cualquier referencia al espacio ambiente. Esto causa algunos problemas al tratar de definir vectores tangentes. Para motivar el esfuerzo que requiere esta aparentemente contradictoria visión no geométrica de objetos geométricos, apelaremos a un ejemplo físico que además nos servirá para introducir la nomenclatura habitual en mecánica.



Péndulo doble



Péndulo triple

Supongamos un péndulo confinado a un plano, como el de un reloj de pared, y en ese péndulo colgamos otro no necesariamente de igual longitud. Esto es lo que se llama un *péndulo doble*. Su estado queda caracterizado por las posiciones P y Q de las masas (digamos puntuales) que cuelgan en los extremos de los brazos, supuestos inextensibles, de cada uno de los péndulos. Los cuatro números que constituyen las coordenadas de P y Q dan información redundante y está claro que dos parámetros bastan para describir la posición. Dos muy naturales son los ángulos α y β formados con la vertical. Matemáticamente las posibles posiciones del péndulo doble forman una variedad de dimensión 2 porque se necesitan dos parámetros para describirlas. En física se prefiere decir que el sistema mecánico tiene dos *grados de libertad* y que el espacio de posibles posiciones es el *espacio de configuración*. Los puntos P y Q dan información redundante porque la distancia de P al origen O del que cuelga el péndulo doble y la distancia de Q a P están fijadas. Si normalizamos estas distancias a 1, entonces el péndulo doble está descrito mediante $S^1 \times S^1$ que todos deberíamos saber que es el toro, que admite una inmersión natural en $\mathbb{R}^3$ como la rosquilla que todos tenemos en mente.

Como siempre, hay una ambigüedad al medir ángulos porque $0° = 360°$. Para evitar problemas con el borde se pueden definir unos ángulos alternativos, por ejemplo con la determinación $(-\pi, \pi)$ en vez de con $(0, 2\pi)$. Esto corresponde a elegir diferentes *cartas*, es como si quisiéramos tener diferentes versiones de un callejero o de las cartas de navegación para que ninguna calle o isla quedase en el borde y así verla bien. También podríamos elegir otras maneras más exóticas de representar al sistema, por ejemplo las sombras que proyectan los puntos P y Q sobre la horizontal. Físicamente se habla de *coordenadas generalizadas* para referirse a las funciones coordenadas de diferentes cartas. La posibilidad de utilizar las coordenadas que a uno le apetezca no está demasiado clara en la formulación de la mecánica de Newton llamada a veces *mecánica vectorial* y constituye el fundamento de la *mecánica analítica*. Un comentario filosófico es que en Matemáticas la libertad en la elección de las coordenadas responde a deseos de generalidad y elegancia mientras que en Física, muchas veces esta libertad se usa para elegir unas coordenadas con propiedades específicas.

Es de suponer que físicamente no aporta demasiado pensar en las posiciones de un péndulo doble como un objeto (el toro) dentro de $\mathbb{R}^3$. Si todavía albergamos dudas, pensemos en el *péndulo triple* obtenido al colgar un tercer péndulo en la segunda masa del péndulo doble. Geométricamente el espacio de configuración se representa por $S^1 \times S^1 \times S^1$ pero ni siquiera está claro a simple vista cuál es el $\mathbb{R}^n$ más pequeño en el que se puede meter este objeto. Todo lo que sabemos es que localmente los tres ángulos con las verticales nos dan todas la información, es decir, que hay tres grados de libertad o que la variedad tiene dimensión tres. Dicho sea de paso, no es difícil meter $S^1 \times S^1 \times S^1$ en $\mathbb{R}^6$, pensándolo como la subvariedad sujeta a las ecuaciones $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$. En Física, estas ecuaciones están asociadas con las *ligaduras* que restringen que P, Q y R se muevan libremente por el plano.

Otro ejemplo físico, muy pretencioso pero ilustrativo, es el propio Universo. Según los modelos cosmológicos, viene representado por una variedad de cuatro dimensiones (espacio tridimensional y tiempo). Si el universo es todo ¿por qué deberíamos imaginar algo que lo contiene?

Un profundo resultado de H. Whitney [Whi44] (ver también [Whi36] para una versión más débil y sencilla) asegura que siempre podemos meter una variedad n-dimensional en $\mathbb{R}^{2n}$ sin perder sus propiedades analíticas. El hecho de considerar las variedades desde dentro, y no como subvariedades de $\mathbb{R}^n$ es una cuestión de conveniencia.

Un ejemplo "más mundano" ilustrando este punto, es que a lo largo de siglos los seres humanos hemos representado un punto sobre la Tierra por su latitud y su longitud en vez de escribir las tres coordenadas en algún sistema de referencia del $\mathbb{R}^3$ circundante.

¿Qué es un vector tangente?

Localmente una variedad de dimensión n es como un pedacito de $\mathbb{R}^n$ y las cuestiones de análisis en la variedad se transforman en otras relativas a $\mathbb{R}^n$. Sin embargo esta idea encuentra un obstáculo cuando uno se enfrenta al concepto de vector tangente porque la imagen geométrica que tenemos de ellos para curvas y superficies es la de flechas en el espacio que se salen de ellas, mientras que ahora la variedad es un todo y no podemos hacer referencia a lo que está fuera. Hay una forma elegante pero muy abstracta de tratar el problema que es definir los vectores con *derivaciones* [O'N83], otra más simple es a través de clases de equivalencia de curvas [Spi79]. Lo que intentamos mostrar aquí es motivar estas definiciones.

La idea de vector tangente está asociada a la velocidad. Si el péndulo doble se pone en movimiento cada uno de los puntos P y Q tendrá una velocidad $(\dot{x}, \dot{y})$ donde, como es habitual en Física por herencia de I. Newton, el punto sobre una función indica su derivada con respecto del tiempo. Estas velocidades "de verdad" de los puntos no dicen demasiado con las coordenadas que estamos usando. Lo lógico sería introducir las *velocidades generalizadas* $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ (las velocidades angulares) y formar con ellas el vector $(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$. Por supuesto, los números obtenidos serían en general distintos con otras coordenadas generalizadas.

Matemáticamente surge el problema de que no hay en principio ninguna dinámica natural asociada a la variedad, ningún tiempo respecto al que derivar. Lo que se hace es asignar a cada curva en la variedad $c = c(t)$, esto es, a cada posible dependencia en t. Con ello se identifica cada vector tangente en un punto p de una variedad M con la lista de números $\big(\dot{x}^1(0), \dot{x}^2(0), \dots, \dot{x}^n(0)\big)$ donde $x^i(t) = (x^i \circ c)(t)$, x^i son las funciones coordenadas de una carta y $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una curva con $c(0) = p$. Los números dependen de la carta pero eso es lógico, igual que en $\mathbb{R}^n$ las coordenadas dependen de la base escogida.

La interpretación como operadores de derivación no es tan rara. Supongamos que tenemos una cantidad f, por ejemplo la energía potencial, que depende de α y β. La variación de f con el tiempo sería

$$\frac{d}{dt} f(\alpha, \beta) = \dot{\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \dot{\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta} = \Big(\dot{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \dot{\beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\Big) f. \tag{1}$$

Ya que considerábamos $(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$. como un vector tangente, esto no es más que la derivada direccional. Así cada vector tangente cuando se usan las coordenadas α y β, se identifica con un operador, una *derivación*, que actúa sobre funciones reales definidas en la variedad. En definida un vector tangente en un punto p de una variedad n-dimensional M se puede pensar y definir como un operador

$$V = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \tag{2}$$

que actúa sobre funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta forma de representar un vector (quizá omitiendo el punto) se prefiere a las listas de n números que hemos introducido antes porque se indica la carta empleada. Si esto no fuera necesario, a veces se abrevia $\partial/\partial x^i$ con ∂_i.

El conjunto de vectores tangentes en un punto p es el *espacio tangente* en p y se denota con $T_p(M)$. Es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y, por tanto, isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

El espacio de fases de velocidades y el fibrado tangente

El *espacio de fases de velocidades* (también *espacio de estados*) no corresponde exactamente con el espacio de fases propiamente dicho que veremos después (aunque a veces se le llama así [NT06]) pero representa la misma idea de un espacio formado por todas condiciones iniciales.

En la mecánica clásica, las condiciones iniciales son posiciones y velocidades. La ecuación de movimiento está totalmente determinada una vez fijadas en un instante inicial. Ahora bien, nuestros vectores tenían también incorporado el punto en el que varían, por tanto el espacio del que estamos hablando es la “unión” de todos los espacios tangentes:

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_p(M).$$

Éste es el *fibrado tangente* una vez que se le dota de estructura de variedad, lo cual es fácil tomando cartas que aplican $\sum v^i\partial_i\big|_p$ en $\big(\phi(p), v^1, v^2, \dots, v^n\big) \in \mathbb{R}^{2n}$ con $(\mathcal{U}, \phi)$ una carta de M. De esta forma la dimensión de TM es doble que la de M.

Una función entre variedades $f : M \longrightarrow N$, induce una aplicación lineal llamada *aplicación tangente* o *pushforward* entre los espacios tangentes $df\big|_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(N)$ en cada punto $p \in M$. Matemáticamente se define como la que aplica cada vector $V \in T_p(M)$, considerado como operador $V = V(\cdot)$ que actúa sobre funciones (2), en el vector (operador) $V(\cdot \circ f)$. Aunque parece complicado, en seguida se ve que, cuando se usan las coordenadas dadas por cartas, simplemente es la aplicación lineal que corresponde a la matriz jacobiana.

Físicamente es todavía más simple, sólo hay que ver la variación de f con el tiempo como en (1). Veámoslo con el ejemplo del péndulo doble, que denotaremos con $\mathcal{P}$. Tenemos la función $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que asigna a cada configuración las coordenadas de P y de Q. Es una especie de inclusión (técnicamente una *inmersión*) en $\mathbb{R}^4$. Si en $\mathcal{P}$ usamos las coordenadas (la carta) correspondiente a (α, β) y en $\mathbb{R}^4$ la carta identidad dada por las cuatro coordenadas, digamos (x, y, u, v), se tiene:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \operatorname{sen}\alpha, & u &= l_1 \operatorname{sen}\alpha + l_2 \operatorname{sen}\beta, \\ y &= -l_1 \cos\alpha, & v &= -l_1 \cos\alpha - l_2 \cos\beta, \end{aligned}$$

donde l_1 es la longitud del péndulo superior y l_2 la del inferior. Suponemos $O = (0, 0)$.

Si suponemos que las posiciones varían con el tiempo, al derivar se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l_1\dot{\alpha}\cos\alpha, & \dot{u} &= l_1\dot{\alpha}\cos\alpha + l_2\dot{\beta}\cos\beta, \\ \dot{y} &= l_1\dot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha, & \dot{v} &= l_1\dot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha + l_2\dot{\beta}\operatorname{sen}\beta, \end{aligned} \tag{3}$$

Como $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ son coordenadas de los vectores tangentes de $\mathcal{P}$ y $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{u}$, $\dot{v}$, lo son de $\mathbb{R}^4$, tenemos una aplicación lineal entre los espacios tangentes. De hecho, como no estamos especificando el punto, tenemos una aplicación $T\mathcal{P} \longrightarrow T\mathbb{R}^4$.

En mecánica la *energía cinética* de una partícula es $\frac{1}{2}mv^2$ donde m es la masa y v el módulo de la velocidad. En $\mathcal{P}$ la energía cinética total es la suma de energías cinéticas de las dos partículas. Si las masas son m_1 y m_2, resulta

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) + \frac{1}{2}m_2\big(\dot{u}^2 + \dot{v}^2\big).$$

A través de la aplicación tangente representada por las fórmulas (3), se puede escribir la energía cinética en términos de las velocidades generalizadas en las coordenadas (α, β), resultando

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\big(l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2 + 2l_1 l_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)\big). \tag{4}$$

Espacio de fases (de momentos) y el fibrado cotangente

Si tenemos una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces la aplicación tangente $df|_p$ envía linealmente vectores tangentes en p a números. Es decir, $df|_p$ es un elemento del espacio dual $T_p^*(M)$. Al igual que hay un fibrado tangente, hay un *fibrado cotangente*, denotado por T^*M, formado por la unión de todos los $T_p^*(M)$ con una estructura natural de variedad de dimensión $2n$. Se prueba que $\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\}$ es una base de $T_p^*(M)$ donde $(\mathcal{U}, \phi)$ es una carta con $p \in \mathcal{U}$ y $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Análogamente los elementos de de TM son *1-formas*

$$a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \cdots + a_n dx^n \qquad \text{con} \quad a_i = a_i(x^1, \dots, x^n) \in C^\infty.$$

Estos objetos son bastante abstractos si nos atenemos a la definición matemática, pues en cada punto son operadores lineales que aplican ciertos operadores (los vectores tangentes) en números. En [Sch85] se insta al lector a pensar en cada punto las 1-formas como líneas paralelas y la acción sobre un vector (considerado como una flechita) como el número de líneas que atraviesan.

Habíamos visto que TM es el espacio de posiciones y velocidades, y tiene sentido considerarlo porque estas cantidades en un instante inicial determinan todo el movimiento. El fibrado cotangente T^*M se puede asociar al espacio formado por posiciones y momentos (lineales) que en Física se llama *espacio de fases*. Con una formación básica en Física quizá suene extraño, que las velocidades estén en un espacio y los momentos, que es multiplicar por la masa, estén en otro. La clave es que ahora estamos con coordenadas arbitrarias (generalizadas). Seguimos esencialmente [Fra04, 2.3.c].

En mecánica un *lagrangiano* es una función $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. Estrictamente, para un físico no es una función arbitraria y también puede suponer en ciertas situaciones que depende del tiempo, pero en principio no nos preocuparemos aquí por ello. Esta función sirve para resolver problemas utilizando posiciones y velocidades (generalizadas). Pasar a la formulación de la mecánica con posiciones y momentos requiere matemáticamente transformar TM en T^*M. Digamos que denotamos con v^i a las coordenadas de los vectores tangentes cuando se usan ciertas funciones coordenadas $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, entonces un lagrangiano es de la forma $L = L(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ y asociado a él creamos la transformación de TM a T^*M dada por

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & T^*M \\ v^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n \dfrac{\partial}{\partial x^n} & \longmapsto & \dfrac{\partial L}{\partial v^1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial L}{\partial v^n} dx^n \end{array}$$

Para que esto tenga sentido, hay que comprobar que la aplicación no depende de la carta escogida. Usando el convenio de sumación

$$\widetilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{v}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} v^j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \widetilde{v}^i}{\partial v^j} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}.$$

Teniendo en cuenta esto y la regla de la cadena, se sigue

$$\frac{\partial L}{\partial v^j} dx^j = \frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}^i} \frac{\partial \widetilde{v}^i}{\partial v^j} dx^j = \frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}^i} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}^i} d\widetilde{x}^j.$$

Por tanto está bien definida. Los coeficientes de la 1-forma que corresponde a un elemento de TM son los *momentos generalizados*. Con la notación mecánica habitual se escribe $L = L\big(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\big)$ con q^i coordenadas generalizadas y se define el i-ésimo momento generalizado como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{5}$$

Dicho de otra forma, es la imagen de $\dot{q}^i \partial/\partial q^i$, la i-ésima velocidad generalizada, por la aplicación anterior.

Una pregunta natural es qué tiene que ver esto con el momento lineal masa por velocidad de toda la vida. Resulta que para una partícula libre, el lagrangiano natural es la energía cinética

$$L = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big).$$

Entonces cuando usamos las coordenadas de siempre $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$, la fórmula (5) nos da como momentos generalizados las coordenadas de $m\vec{v}$.

Habitualmente el lagrangiano interesante en mecánico es la energía cinética más algo que no depende de las velocidades generalizadas. Con esta idea y el cálculo que habíamos hecho en (4) de la energía cinética en el péndulo doble $\mathcal{P}$, vemos que en ese caso la aplicación de TM en T^*M es:

$$\dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \mapsto p_1 d\alpha + p_2 d\beta$$

con

$$p_1 = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\alpha} + m_2 l_1 l_2 \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta), \qquad p_2 = m_2 l_2^2 \dot{\beta} + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta).$$

Esta relación y mucha paciencia (hay maneras de reducir los cálculos pero no entraremos en ello), permiten eliminar $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ de (4) y expresar la energía cinética en términos de posiciones y momentos:

$$E_k = \frac{m_2 l_2^2 p_1 + (m_1 + m_2) l_1^2 p_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 p_1 p_2 \cos(\alpha - \beta)}{2 l_1^2 l_2^2 m_2 \big(m_1 + m_2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)\big)}$$

que pasa a ser, por tanto, una función definida en el espacio de fases T^*M.

Un breve diccionario mecánico-geométrico

La correspondencia entre los conceptos meçanicos y geométricos más básicos, es:

Mecánica	**Geometría**
Espacio de configuración	Variedad
Grados de libertad	Dimensión
Ligaduras	Ecuaciones de subvariedad
Coordenadas generalizadas	Funciones coordenadas
Velocidad	Vector tangente
Espacio de fases de velocidades	Fibrado tangente
Espacio de fases (de momentos)	Fibrado cotangente

La mayor parte de la bibliografía está en inglés, por tanto también puede resultar útil:

Mechanics	**Geometry**
Configuration space	Manifold
Degrees of freedom	Dimension
Constraints	Submanifold equations
Generalized coordinates	Coordinate map
Velocity	Tangent vector
Velocity phase space	Tangent bundle
Phase space	Cotangent bundle

Referencias

[Fra04] T. Frankel. *The geometry of physics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. An introduction.

[NT06] S. P. Novikov and I. A. Taimanov. *Modern geometric structures and fields*, volume 71 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Translated from the 2005 Russian original by Dimitry Chibisov.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Whi36] H. Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 37(3):645–680, 1936.

[Whi44] H. Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Math. (2)*, 45:220–246, 1944.