

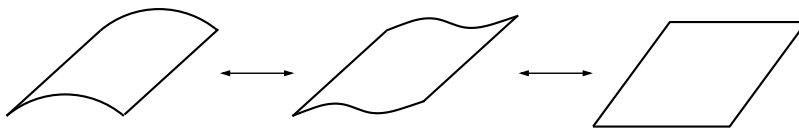
Capítulo 4

Curvatura en variedades

Una curva en \mathbb{R}^2 está intuitivamente muy curvada si su vector normal o tangente (uno viene de girar el otro) presenta grandes variaciones. La definición dada en los cursos básicos de geometría es fiel a esta idea, pues una vez normalizada la parametrización de la curva por longitud de arco, las fórmulas de Frenet-Serret nos dicen que la curvatura es el módulo de la derivada del vector tangente o normal unitario.

En una superficie S inmersa en \mathbb{R}^3 hay muchas direcciones en las que estudiar la variación de la normal alrededor de un punto. Siguiendo un importante y famoso trabajo de C.F. Gauss, un balance global de ellas consiste en medir la variación del área de la región descrita por el extremo del vector normal unitario. Precisamente, se introduce la *aplicación de Gauss* $N : S \rightarrow S^2$ que asigna a cada punto su normal unitaria e identificando los planos tangentes $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$, que son paralelos, dN se puede considerar un endomorfismo en $T_p(S)$ cuyo determinante mide la variación de área. Se define *curvatura de Gauss* en p , como el valor $K(p)$ de este determinante. Expresiones alternativas para $K(p)$ son el producto de las curvaturas principales o el cociente de los determinantes de la segunda y la primera formas fundamentales.

Gauss, tras introducir la curvatura K , probó el sorprendente resultado de que es intrínseca: depende sólo de la métrica de la superficie (inducida por la usual). Es decir, en contra de lo que sugiere la definición, es posible medir $K(p)$, desde dentro, sin referencia al espacio en el que está inmersa la superficie. A este resultado se le conoce como *Teorema Egregio*. En particular, si $f : S \rightarrow \tilde{S}$ es una *isometría*, una aplicación que preserva la métrica en el sentido de que $G(\vec{v}, \vec{v}) = \tilde{G}(df(\vec{v}), df(\vec{v}))$, entonces $K(p) = \tilde{K}(f(p))$.



Ello explica por qué $K = 0$ para un cilindro, un cono o cualquier cosa que localmente se pueda aplanar en \mathbb{R}^2 sin cambiar las distancias. La aparente curvatura de una porción de cilindro es sólo un efecto de mirarlo desde fuera y desaparecería si viviéramos dentro.

Originariamente, aunque no en su redacción final (véase [Spi79]), Gauss dedujo el Teorema Egregio a partir de lo que hoy en día se conoce como *Teorema de Gauss-Bonnet*:

$$\int_T K dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

donde T es un *triángulo geodésico* en la superficie (un triángulo formado por geodésicas) y α , β y γ son sus ángulos. Un habitante de una esfera podría percatarse de que no vive en un plano ($K = 0$) sin salirse de su mundo, comprobando que $\alpha + \beta + \gamma \neq \pi$ y podría estimar K dividiendo $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ entre el área de T para triángulos muy pequeños.

Cuando intentamos generalizar la curvatura de Gauss a variedades, nos debemos olvidar de la definición original de Gauss porque no tiene sentido hablar de la normal en cada punto. La cantidad $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ en el teorema de Gauss Bonnet es la variación del ángulo en un vector transportado paralelamente a lo largo de las geodésicas que conforman la frontera de T . Por ello, la nueva definición de curvatura interpreta que es lo que indica la variación por unidad de área de un vector por un transporte paralelo “cíclico”. La curvatura será en este sentido un tensor de tipo $(1, 3)$ porque se necesita un vector de partida para ser transportado, dos direcciones que en cierto modo indican dos lados del triángulo geodésico, y el resultado es una variación de carácter vectorial.

Hay también otra manera de entender la curvatura que no desarrollaremos aquí, y es como una especie de coeficientes de Taylor cuando se trata de aproximar una métrica Riemanniana por una euclídea [Gon05, §4.11], [Spi79]. Algo que se cancela si y sólo si estamos en el caso euclídeo, lo cual está más cerca del acercamiento del propio Riemann, quien estaba interesado en dar condiciones necesarias y suficientes para que una variedad fuera localmente isométrica a \mathbb{R}^n .

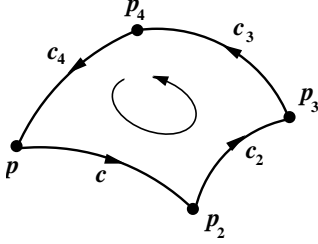
La curvatura tiene una importancia capital en la relatividad general, ya que de postula que la métrica del espacio-tiempo debe satisfacer que la curvatura es proporcional a la densidad de masa y energía. Por otro lado la curvatura, a pesar de su definición local, interviene en resultados “globales” de topología diferencial. Por ejemplo, es conocido que una superficie compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ es homeomorfa a una esfera con g asas (la suma conexas de g toros). Esta cantidad g , puramente topológica, se expresa en términos de la curvatura de Gauss mediante la sencilla fórmula

$$\int_S K dS = 4\pi(1 - g).$$

4.1. Definición y significado

Intentamos adaptar a variedades la definición de curvatura de Gauss como una medida de la variación de un vector por transportes paralelos a lo largo de caminos cerrados infinitesimales.

En vez de considerar un triángulo geodésico en la variedad semiriemanniana, consideramos un “paralelogramo” cuyos lados están en las direcciones ∂_1 y ∂_2 , dado por las curvas $c_1(t) = \phi^{-1}(t, 0, 0, \dots)$, $c_2(s) = \phi^{-1}(\delta, s, 0, \dots)$, $c_3(t) = \phi^{-1}(\delta - t, \epsilon, 0, \dots)$ y $c_4(s) = \phi^{-1}(0, \epsilon - s, 0, \dots)$.



Sea $p_i = c_i(0)$, $p = p_1$ y sea P_i el transporte paralelo a lo largo de c_i , entonces la curvatura correspondiente a las direcciones ∂_1 y ∂_2 es la aplicación lineal

$$\vec{v} \in T_p(M) \mapsto - \lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_4 P_3 P_2 P_1(\vec{v}) - \vec{v}}{\delta \epsilon}.$$

El signo menos es convencional para conservar cierto paralelismo con la definición original de la curvatura gaussiana.

Esta definición general es demasiado fea y poco operativa como para asignarle un lugar prominente. Se prefiere otra más sintética, que motivamos a continuación, utilizando la conexión de Levi-Civita.

Recordemos que la derivada covariante medía la variación absoluta de un campo de vectores, teniendo en cuenta no sólo el cambio en sus coordenadas sino también el sistema de referencia en el que se expresan. El transporte paralelo corresponde al caso en el que no hay variaciones a lo largo de una curva c , por ello es natural esperar

$$(4.1) \quad \nabla_{\dot{c}(0)} W = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_t|_{c(0)} - W|_{c(0)}}{-t}$$

donde $W_t|_{c(0)}$ es el transporte paralelo de $W|_{c(t)}$ a $c(0)$ (véase [Wal04, §4] para una prueba). El denominador viene de que al pasar de $c(t)$ a $c(0)$ el incremento del parámetro es $-t$.

Dado $\vec{v} \in T_p(M)$, consideremos el transporte paralelo a lo largo de c_1 y c_2 (por este orden), lo que dará un vector en $p_3 = \phi^{-1}(\delta, \epsilon, 0, \dots)$. Como δ y ϵ son arbitrarios, podemos definir de esta forma un campo V con $\vec{v} = V|_p$ en un entorno de p , y en cualquier caso dentro del paralelogramo inicial.

Consideremos ahora en p el operador derivada cruzada $R(\partial_1, \partial_2)|_p = \nabla_{\partial_1|_p} \nabla_{\partial_2} - \nabla_{\partial_2|_p} \nabla_{\partial_1}$. Por la definición de V , se tiene $\nabla_{\partial_2} V = 0$ (porque el último transporte paralelo fue por c_2) y (4.1) implica

$$R(\partial_1, \partial_2)|_p V = -\nabla_{\partial_2|_p} \nabla_{\partial_1} V = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_4(\nabla_{\partial_1|_{p_4}} V) - \partial_1|_p V}{\epsilon}.$$

Como en c_1 el campo V viene del transporte paralelo de \vec{v} , el segundo término en el numerador se anula y una nueva aplicación de (4.1) lleva a

$$R(\partial_1, \partial_2)|_p V = - \lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_4(P_3(V|_{p_3}) - V|_{p_4})}{\epsilon \delta}.$$

De nuevo por la definición de V se tiene V , se tiene $V|_{p_3} = P_2P_1(\vec{v})$ y $\vec{v} = P_4(V|_{p_4})$, así pues

$$R(\partial_1, \partial_2)|_p V = - \lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_4P_3P_2P_1(\vec{v}) - \vec{v}}{\delta\epsilon}.$$

Entonces podemos medir la curvatura de una variedad semiriemanniana M a través del operador diferencial $R(\partial_1, \partial_2)$. Por supuesto, seleccionando otras direcciones obtendremos otras curvaturas $R(\partial_k, \partial_l)$. Es importante notar que gracias a las propiedades de las conexiones, se verifica $R(\partial_k, \partial_l)(fV) = fR(\partial_k, \partial_l)(V)$ para cualquier función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la construcción de V es irrelevante, cualquier campo de vectores con $V|_p = \vec{v}$ habría dado el mismo resultado. En otras palabras, $R(\partial_k, \partial_l)$ define una aplicación lineal $T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ y por tanto puede considerarse un tensor de tipo $(1, 1)$. Todavía más, generalizando $R(\partial_k, \partial_l)$ a

$$(4.2) \quad R(Y, Z) = \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y - \nabla_{[Y, Z]}$$

se tiene, de nuevo por la propiedades de las conexiones, que $(X, Y, Z) \mapsto R(Y, Z)X$ es lineal en sus tres argumentos bajo multiplicación de funciones y así da lugar a una aplicación lineal bien definida $T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$. Con un elemento del dual, transformamos la imagen en \mathbb{R} y así obtenemos un tensor de tipo $(1, 3)$. De los tres argumentos vectoriales, el primero indica el vector que sufre el transporte paralelo y los otros dos indican el paralelogramo por el que se lleva a cabo¹.

Definición: En una variedad semiriemanniana se llama *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* al tensor de tipo $(1, 3)$ que corresponde a $(X, Y, Z) \mapsto R(Y, Z)X$ y se denota a sus componentes en una carta mediante R^i_{jkl} . Es decir, R^i_{jkl} es la componente i -ésima de $R(\partial_k, \partial_l)\partial_j$.

Observación: La definición se puede reinterpretar diciendo que para cualquier campo de vectores V se verifica $V^i_{;lk} - V^i_{;kl} = R^i_{jkl}V^j$. A primera vista es sorprendente que las derivadas covariantes cruzadas se cancelen de tal manera que sólo queden términos lineales en las componentes del campo de vectores. En principio (4.2) permite asignar un tensor de curvatura a una conexión sin referencia a una métrica. Sin embargo algunas de las propiedades enunciadas más adelante serían falsas sin una estructura semiriemanniana y supondremos en todo el capítulo que trabajamos en este ámbito con la conexión de Levi-Civita.

Si uno desea una fórmula explícita para R^i_{jkl} en términos de la métrica, debe enfrentarse a una expresión poco manejable.

¹Ésta es la notación habitual pero no es universal, algunos autores (por ejemplo [dC92, p.89]) definen $R(\cdot, \cdot)$ con el signo contrario y admiten otra ordenación de los argumentos. Las simetrías que veremos a continuación, hacen poco importantes estos cambios notacionales

Proposición 4.1.1 *Fijada una carta, se tiene*

$$(4.3) \quad R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{nk}^i \Gamma_{jl}^n - \Gamma_{nl}^i \Gamma_{jk}^n.$$

Demostración: Sabemos que $R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = R_{jkl}^i \partial_i$, así pues debemos calcular las componentes de $\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j$. Por definición, de los símbolos de Christoffel, $\nabla_{\partial_l} \partial_j = \Gamma_{jl}^i \partial_i$, entonces

$$\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j = \nabla_{\partial_k} (\Gamma_{jl}^i \partial_i) = (\Gamma_{jl,k}^i + \Gamma_{nk}^i \Gamma_{jl}^n) \partial_i.$$

Intercambiando k y l y restando los resultados, se obtiene la fórmula buscada. \square

En las componentes del tensor de Riemann hay mucha información redundante debido a ciertas simetrías que se hacen más claras si damos a todos sus argumentos el mismo carácter covariante.

Proposición 4.1.2 *Sea $R_{ijkl} = g_{in} R_{jkl}^n$, entonces se cumplen las identidades*

$$a) \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij}, \quad b) \quad R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0.$$

Demostración: La definición $R_{jkl}^i \partial_i = R(\partial_k, \partial_l)\partial_j$ implica $R_{ijkl} = G(R(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i)$.

La primera igualdad de $a)$ se sigue inmediatamente de (4.2). Por otro lado $b)$ también se obtiene a partir de (4.2) con un cálculo más elaborado usando la simetría de los símbolos de Christoffel $\nabla_{\partial_k} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_k$.

Una forma bilineal B en un espacio vectorial verifica la identidad de polarización $B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{y}, \vec{x}) = B(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - B(\vec{x}, \vec{x}) - B(\vec{y}, \vec{y})$. Entonces es antisimétrica si y sólo si $B(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ para todo \vec{v} . Por ello, para obtener $R_{ijkl} + R_{jikl} = 0$ basta probar $G(R(\partial_k, \partial_l)X, X) = 0$. Por las propiedades de la conexión de Levi-Civita

$$\frac{1}{2} \partial_k \partial_l G(X; X) = \partial_k G(\nabla_{\partial_l} X, X) = G(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} X, X) + G(\nabla_{\partial_l} X, \nabla_{\partial_k} X).$$

Intercambiando k y l y restando, se sigue $G(R(\partial_k, \partial_l)X, X) = 0$.

Finalmente, para probar la igualdad restante, $R_{ijkl} = R_{klij}$, partimos de $b)$ y consideramos esta identidad permutando cíclicamente los nombres de los índices en R_{ijkl} . Por ejemplo, una de las cuatro identidades resultantes sería $R_{jkli} + R_{jikl} + R_{jlik} = 0$. Usando las antisimetrías ya probadas, la suma de todas es $R_{ijkl} - R_{klij} = 0$. \square

Incluso tomando en cuenta las simetrías, el tensor de Riemann con sus n^4 componentes es bastante intrincado y se echa de menos una simple función invariante por isometrías como la curvatura de Gauss en la teoría de superficies. El siguiente resultado, prácticamente de álgebra lineal, marca una dirección para dar una definición en este sentido.

Lema 4.1.3 *Sea M una variedad semiriemanniana con métrica G . Para vectores cualesquiera $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y} \in T_p(M)$ tales que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ y $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ son bases de un mismo espacio bidimensional, se tiene*

$$\frac{G(R(\vec{a}, \vec{b})\vec{b}, \vec{a})}{G(\vec{a}, \vec{a})G(\vec{b}, \vec{b}) - G^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{G(R(\vec{x}, \vec{y})\vec{y}, \vec{x})}{G(\vec{x}, \vec{x})G(\vec{y}, \vec{y}) - G^2(\vec{x}, \vec{y})}.$$

Demostración: Cada matriz real 2×2 se puede escribir como producto de matrices elementales de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo la matriz de cambio de base de $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ a $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ de esta forma, se sigue el resultado, pues cada uno de estos cambios preservan la expresión del enunciado. Para el primer tipo de transformaciones, usando que G es bilineal, $G(\vec{a}, \vec{a})G(\lambda\vec{a} + \vec{b}, \lambda\vec{a} + \vec{b}) - G^2(\vec{a}, \lambda\vec{a} + \vec{b})$ no depende de λ y se puede tomar $\lambda = 0$. Por otro lado, se cumple que $G(R(\vec{a}, \lambda\vec{a} + \vec{b})(\lambda\vec{a} + \vec{b}), \vec{a})$ es igual a $G(R(\vec{a}, \vec{b})(\lambda\vec{a} + \vec{b}), \vec{a})$ ya que $R(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ y la antisimetría $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ de la Proposición 4.1.2 asegura que $G(R(\vec{a}, \vec{b})\vec{a}, \vec{a}) = 0$.

La invariancia por los otros dos tipos de transformaciones se sigue con cálculos más elementales. \square

Definición: Fijado un punto p en una variedad semiriemanniana M y un supespacio bidimensional σ_p de $T_p(M)$ se llama *curvatura seccional* de σ_p a

$$K(\sigma_p) = \frac{G(R(\vec{a}, \vec{b})\vec{b}, \vec{a})}{G(\vec{a}, \vec{a})G(\vec{b}, \vec{b}) - G^2(\vec{a}, \vec{b})}$$

con $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base de σ_p .

Las curvaturas seccionales están bien definidas por el Lema 4.1.3 y dan tanta información como el propio tensor de Riemann [dC92, 4§3], que puede recuperarse por polarización [Wal04, p.143]. Además aparecen más naturalmente en algunos teoremas que relacionan curvatura y topología [Wal04, 5].

Para superficies $M \subset \mathbb{R}^3$, con la métrica inducida, $K(\sigma_p)$ es exactamente la curvatura de Gauss en p de $\exp_p(\mathcal{U})$ donde \mathcal{U} es un entorno del origen de σ_p en el que la aplicación exponencial \exp_p sea un difeomorfismo sobre su imagen [dC92, 6].

En dimensión dos, $\sigma_p = T_p(M)$ y sólo hay una curvatura seccional. Entonces podemos redefinir la curvatura de Gauss de una superficie (variedad bidimensional). Aunque no sea una subvariedad de \mathbb{R}^3 y sin referencia a ningún espacio en el que esté inmersa, como la función

$$(4.4) \quad K(p) = \frac{G(R(\partial_1, \partial_2)\partial_2, \partial_1)}{G(\partial_1, \partial_1)G(\partial_2, \partial_2) - G^2(\partial_1, \partial_2)} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Gracias al Lema 4.1.3, $K(p)$ es realmente una función en la variedad: no depende del sistema de coordenadas empleado.

En cualquier dimensión, una forma de reducir la aparatosidad del tensor de Riemann sacrificando parte de la información es considerar contracciones, es decir, igualar un índice covariante y otro contravariante y sumar. Debido a las simetrías, básicamente sólo hay una posibilidad, la cual desempeña un papel fundamental en relatividad general y se asocia con el nombre abreviado de G. Ricci-Curbastro. Él y Levi-Civita, que era su estudiante, desarrollaron el cálculo tensorial antes del nacimiento de la relatividad.

Definición: En una variedad semiriemanniana se llama *tensor de Ricci* al tensor de tipo $(0, 2)$ cuyas componentes son $R_{ij} = R_{ikj}^k$. Equivalentemente, el tensor de Ricci asigna a cada par de campos de vectores (X, Y) la traza de la aplicación lineal $R(\cdot, Y)X$.

Hay una fórmula para las componentes del tensor de Ricci que da lugar a cálculos razonables para métricas sencillas en dimensión baja.

Proposición 4.1.4 *Si g es el determinante de la matriz de componentes de la métrica, se cumple*

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k)_{,k} - (\log \sqrt{|g|})_{,ij} - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l.$$

Demostración: Consideramos sólo el caso $g > 0$, el otro es completamente similar.

Sea \vec{v}_i el vector cuya componente j -ésima es g_{ij} , entonces al ser el determinante una función multilineal

$$g_{,i} = \sum_{k=1}^n \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k,i}, \dots, \vec{v}_n).$$

Desarrollando el determinante por la k -ésima columna se tiene $g_{,i} = g_{jk,i} G^{jk}$ con G^{jk} el cofactor del elemento g_{jk} que por álgebra lineal elemental es gg^{kj} . De aquí, por la simetría de g^{kj} ,

$$g_{,i} = gg^{kj} g_{jk,i} = gg^{kj} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) = 2g \Gamma_{ik}^k$$

que implica $\Gamma_{ik}^k = (\log \sqrt{|g|})_{,i}$ y por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \Gamma_{ij}^k)_{,k} = \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij,k}^k \quad \text{y} \quad (\log \sqrt{|g|})_{,ij} = \Gamma_{ik,j}^k.$$

Entonces la fórmula del enunciado equivale a

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{kl}^l \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{li}^k \Gamma_{jk}^l$$

y esto se deduce de (4.3) y la definición $R_{ij} = R_{ikj}^k$. \square

O bien usando la Proposición 4.1.2 o directamente con la expresión en coordenadas de la Proposición 4.1.4, se tiene que el tensor de Ricci es simétrico, esto es, $R_{ij} = R_{ji}$.

Ejemplo: Calculemos el tensor de Ricci correspondiente a la métrica de Schwarzschild bidimensional con $r_0 = 1$, dada por $-(1 - r^{-1})dt^2 + (1 - r^{-1})^{-1}dr^2$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange con $L = -(1 - r^{-1})\dot{t}^2 + (1 - r^{-1})^{-1}\dot{r}^2$ dan lugar a las ecuaciones diferenciales de las geodésicas

$$\ddot{t} + \frac{\dot{t}\dot{r}}{r^2 - r} = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{r} + \frac{r-1}{2r^3}\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{2(r^2 - r)} = 0.$$

Empleando una notación común en relatividad, asignamos el índice cero al tiempo. Entonces los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2(r^2 - r)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{r-1}{2r^3} \quad \text{y} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{-1}{2(r^2 - r)}.$$

Según la Proposición 4.1.4 y estos cálculos, $R_{01} = \Gamma_{01,k}^k - \Gamma_{l0}^k \Gamma_{1k}^l = 0 - \Gamma_{00}^k \Gamma_{1k}^0 - \Gamma_{10}^k \Gamma_{1k}^1 = 0$. Así pues $R_{01} = R_{10} = 0$, de hecho esto es general en el caso de dimensión dos para métricas diagonales. Por otro lado,

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{00}^k \Gamma_{0k}^0 - \Gamma_{10}^k \Gamma_{0k}^1 = (-r^{-3} + \frac{3}{2}r^{-4}) - \frac{1}{4}r^{-4} - \frac{1}{4}r^{-4} = \frac{1-r}{r^4}.$$

Análogamente

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{01}^k \Gamma_{1k}^0 - \Gamma_{11}^k \Gamma_{1k}^1 = \frac{2r-1}{2(r^2 - r)^2} - \frac{1}{4(r^2 - r)^2} - \frac{1}{4(r^2 - r)^2} = \frac{1}{r^2(r-1)}.$$

Con $g^{ik}R_{jk}$ se consigue elevar uno de los índices del tensor de Ricci y así es posible llevar a cabo una contracción más para conseguir una función.

Definición: Se llama *curvatura escalar* de una variedad semiriemanniana a la función $R = g^{ij}R_{ij}$.

Como era de esperar, en el caso bidimensional no hay nada nuevo respecto a la curvatura de Gauss de (4.4).

Proposición 4.1.5 *En una variedad semiriemanniana bidimensional, se cumple $R = 2K$ donde R es la curvatura escalar y K es la curvatura de Gauss.*

Demostración: Con la notación de la Proposición 4.1.2, $R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl}$ y las simetrías allí indicadas permiten escribir $R_{11} = g^{22}R_{1212}$, $R_{12} = R_{21} = -g^{12}R_{1212}$, $R_{22} = g^{11}R_{1212}$. Entonces $R = g^{ij}R_{ij}$ y (4.4) implican $R = 2(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2)(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)K$. El producto de ambos paréntesis vale uno porque es el determinante de una matriz por el de su inversa, por tanto la curvatura escalar es el doble de la curvatura de Gauss. \square

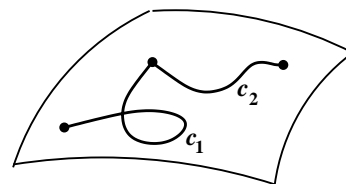
4.2. Curvatura y topología

Una métrica riemanniana en M permite medir vectores en $T_p(M)$ y con ello se pueden calcular (definir) longitudes de curvas simplemente utilizando que los vectores tangentes son velocidades y que el espacio es la velocidad por el tiempo. Con esta idea, ya habíamos definido en (3.15) la longitud de una curva $c : [0, 1] \rightarrow M$ que conecta $p = c(0)$ y $q = c(1)$. Si el dominio de definición es $[t_1, t_2]$ o si queremos medir sólo el arco correspondiente a este intervalo, la definición sería

$$\ell(c) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{G(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

que sigue siendo invariante por reparametrizaciones. Cuando c es una geodésica el integrando es constante por el Corolario 3.3.4 y se tiene $\ell(c) = (t_2 - t_1)\sqrt{G(\dot{c}(0), \dot{c}(0))}$.

Claramente no causa ningún problema apreciable que la curva tenga algún punto aislado en el que no sea suave (donde suave significa C^∞) y en contra de la política seguida en el resto del curso, aquí convendrá considerar también estos objetos con fallos en la regularidad en puntos aislados, con el único propósito de conectar curvas distintas. Concretamente, si $c_1 : [t_1, t_2] \rightarrow M$ y $c_2 : [t_2, t_3] \rightarrow M$ con $c_1(t_2) = c_2(t_2)$, la curva $c : [t_1, t_3] \rightarrow M$ dada por $c(t) = c_1(t)$ si $t \in [t_1, t_2]$ y $c(t) = c_2(t)$ si $t \in [t_2, t_3]$ es continua pero no regular en general en $t = t_2$, sin embargo eso no cambia la relación $\ell(c) = \ell(c_1) + \ell(c_2)$.



Si M es una variedad riemanniana conexa, existe siempre una curva que conecta dos puntos (conexo y localmente conexo por arcos implica conexo por arcos) y es natural definir la longitud del camino más corto.

Definición: Sea M una variedad riemanniana conexa. Se define la *distancia riemanniana* en M como la función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

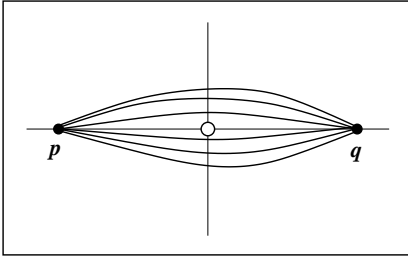
$$d(p, q) = \inf \{ \ell(c) : c(0) = p, c(1) = q \text{ para } c \text{ suave a trozos} \}.$$

Para nuestra tranquilidad notacional, deberíamos convencernos de que la distancia riemanniana es verdaderamente una distancia.

Proposición 4.2.1 *Con la notación de la definición anterior se tiene que (M, d) es un espacio métrico.*

Demostración: Verificar las propiedades es una tarea más o menos rutinaria (que se deja al lector) salvo probar que $d(p, q) = 0$ implica $p = q$. Para ello, recordemos que la

Proposición 3.3.5 asegura que siempre existe una bola centrada B_ϵ en $T_p(M)$ tal que \exp_p define un difeomorfismo en $B_{2\epsilon}$. Si $p \neq q$, escogiendo ϵ suficientemente pequeño, se tiene $q \notin \exp_p(B_\epsilon)$. Si fuera $d(p, q) < \epsilon$ entonces existiría una curva $c(0) = p$, $c(1) = q$ con $\ell(c) < \epsilon$. Sea $t_0 = \inf\{t : c(t) \notin \exp_p(B_\epsilon)\}$, entonces $\tilde{c}(t) = c(t_0 t)$ conectaría $p = \tilde{c}(0)$ con un punto $\tilde{c}(1)$ de la frontera de B_ϵ y $\ell(\tilde{c}) \leq \ell(c) < \epsilon$ porque $0 < t_0 \leq 1$ pero esto contradice el Teorema 3.3.7 (la frontera de B_ϵ son los puntos alcanzables con geodésicas de longitud ϵ). \square



Sabemos que cada par de puntos se conecta con una curva y también, por el Teorema 3.3.7 (ver también la demostración anterior) que localmente se puede reemplazar un arco de curva por uno de geodésica, pero ello no implica que para cada par de puntos exista una geodésica que los une dando un minimizante de la longitud. De hecho tal minimizante puede no existir. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 claramente $d(p, q) = 2$ para $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$ con el minimizante dado por el segmento de recta que une p y q . En $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ todavía se tiene $d(p, q) = 2$ pero sólo podemos construir una familia de curvas para la que $\inf \ell(c) = 2$ porque excluir el origen impide tomar el segmento de recta anterior.

El teorema de Hopf-Rinow afirma, entre otras cosas, que la única forma de que no haya *geodésicas minimizantes* (geodésicas c con $c(0) = p$, $c(1) = q$ y $d(p, q) = \ell(c)$ para p y q dados) es que topológicamente falte algún punto. Aquí seguimos esencialmente la exposición de [O'N83].

Teorema 4.2.2 (de Hopf-Rinow) *Sea M una variedad riemanniana conexa y sea d su distancia riemanniana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) *El espacio métrico (M, d) es completo.*
- b) *La aplicación \exp_p está bien definida en todo $T_p(M)$ cualquiera que sea $p \in M$.*
- c) *Un subconjunto de M es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

La mayor dificultad de la prueba viene del siguiente resultado que tiene interés independiente.

Proposición 4.2.3 *Sea M una variedad riemanniana conexa y $p \in M$. Si la aplicación \exp_p está definida en todo $T_p(M)$, entonces para cualquier $q \in M$ existe una geodésica minimizante que conecta p y q .*

Veamos primero cómo a partir de este resultado se deduce el teorema de Hopf-Rinow y la afirmación con la que lo hemos presentado.

Demostración del Teorema 4.2.2: Probaremos $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$.

$a) \Rightarrow b)$. Si para cierto $p \in M$, el dominio de \exp_p no fuera $T_p(M)$, habría alguna geodésica c con $c(0) = p$ y $G(\dot{c}, \dot{c}) = 1$ tal que $c(t)$ no está definida para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Sea $t_0 \in \mathbb{R}^+$ el máximo valor tal que c está definida en $I = [0, t_0)$. Para cualquier $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset I$ con $t_n \rightarrow t_0$ se tiene $d(c(t_n), c(t_m)) \leq |t_n - t_m| \rightarrow 0$, así pues $\{c(t_n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge a cierto punto de M . Por consiguiente, c se extiende por continuidad a $[0, t_0]$, lo que contradice la teoría de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias² por la elección de t_0 .

$b) \Rightarrow c)$. Dado $K \subset M$ cerrado y acotado, elijamos $p \in K$ y sea δ el supremo de las distancias de p a los elementos de K . Por la Proposición 4.2.3, para cada $q \in K$ existe una geodésica c_q con $c_q(0) = p$, $c_q(1) = q$ y $\ell(c_q) = d(p, q)$. Entonces $\sqrt{G(\dot{c}_q(0), \dot{c}_q(0))} \leq \delta$ y esto significa que $K \subset \exp_p(\overline{B_\delta})$. El conjunto $\overline{B_\delta}$ es compacto (una bola en un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^n) y \exp_p es continua. La topología general básica implica que $\exp_p(\overline{B_\delta})$ es compacto y K también lo es (por ser cerrado dentro de compacto).

$c) \Rightarrow a)$. Una sucesión de Cauchy conforma siempre un conjunto acotado, su cierre será entonces compacto y la sucesión tendrá una subsucesión convergente pero en una sucesión de Cauchy $\lim a_{n_k} = \lim a_n$ siempre que el primer límite exista. \square

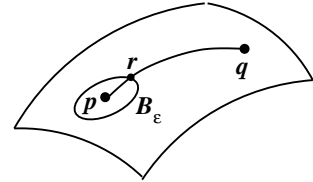
Corolario 4.2.4 *En una variedad riemanniana conexa y completa, cualquier par de puntos están conectados por una geodésica minimizante. En particular $d(p, q)$ es la longitud de la geodésica más corta que conecta p y q .*

Demostración: Basta aplicar $a) \Rightarrow b)$ del teorema de Hopf-Rinow y la Proposición 4.2.3. \square

Demostración de la Proposición 4.2.3: La idea intuitiva básica es sencilla. En un entorno de p las geodésicas son minimizantes por el Teorema 3.3.7, por ello en el camino de p a q se puede comenzar usando una geodésica. Si en algún punto debiéramos cambiar de curva, llegaríamos a una contradicción con el Teorema 3.3.7 en un entorno suyo.

Los detalles topológicos complican el desarrollo de esta idea intuitiva.

Consideremos un entorno de p de la forma $\exp_p(B_\epsilon)$ que no contenga a q y sea $r = \exp_p(\epsilon \vec{v})$, $G(\vec{v}, \vec{v}) = 1$, en su frontera tal que $d(r, q)$ sea mínimo (tal frontera existe y es compacta para ϵ pequeño porque \exp_p es difeomorfismo local). Por el Teorema 3.3.7, $d(p, r) = \epsilon$ y esta distancia se realiza por medio del arco de la geodésica $\gamma(t) = \exp_p(t\vec{v})$ con $t \in [0, \epsilon]$. Para cualquier curva con $c(0) = p$ y $c(1) = q$, sea c_1 el arco de c con $t \in [0, t_0]$ donde $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : c(t) \notin \exp_p(B_\epsilon)\}$ y c_2 el arco $t \in [t_0, 1]$. De



²La única manera de que la solución de una ecuación diferencial ordinaria bien planteada deje de existir, es que explote (como ocurre con la solución de $x' = x^2$, $x(0) = 1$ en $t = 1$). En nuestro caso habría existencia y unicidad en un entorno de t_0 y conseguiríamos una solución en $[0, t_0 + \epsilon)$ en contra de la definición de t_0 .

$d(p, r) = \epsilon$ y la elección de r , $\ell(c) = \ell(c_1) + \ell(c_2) \geq d(p, r) + d(r, q)$ y tomando ínfimos en c ,

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q) = d(p, \gamma(\epsilon)) + d(\gamma(\epsilon), q).$$

De hecho $d(p, \gamma(t)) = t$ para $\gamma(t) \in \exp_p(B_\epsilon)$ porque $G(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ y entonces se tiene

$$(4.5) \quad d(p, q) = t + d(\gamma(t), q) \quad \text{para } t \in [0, \epsilon].$$

Por hipótesis, la geodésica $\gamma(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular $[0, d(p, q)]$.

Repetiendo el argumento que ha llevado a (4.5) pero con $r = \gamma(\epsilon)$ en lugar de p , se obtiene

$$(4.6) \quad d(r, q) = t + d(\tilde{\gamma}(t), q) \quad \text{para } t \in [0, \epsilon']$$

con $\tilde{\gamma}(t) = \exp_r(t\vec{w})$, $G(\vec{w}, \vec{w}) = 1$ y $\epsilon' > 0$.

Entonces, recordando que $d(p, q) = d(p, r) + d(r, q) = \epsilon + d(r, q)$, la igualdad de (4.5) se cumple para $t \in [0, \epsilon + \epsilon']$ reemplazando $\gamma(t)$ por $c(t) = \gamma(t)$ si $t \in [0, \epsilon]$ y $c(t) = \tilde{\gamma}(t - \epsilon)$ si $t \in [\epsilon, \epsilon + \epsilon']$. Por (4.5) y (4.6), escribiendo $p_1 = c(\epsilon - \delta)$, $q_1 = c(\epsilon + \delta)$ con $0 < \delta < \min(\epsilon, \epsilon')$,

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q) = d(p, p_1) + d(p_1, r) + d(r, q_1) + d(q_1, q)$$

de donde se deduce, con la ayuda de la triangular, $d(p_1, q_1) = d(p_1, r) + d(r, q_1) = 2\delta$. Si δ es suficientemente pequeño, entonces q_1 está en $\exp_{p_1}(B_\lambda)$ para algún $\lambda > 0$ y por el Teorema 3.3.7, la curva $c(t)$, que conecta $p_1 = c(\epsilon - \delta)$ y $q_1 = c(\epsilon + \delta)$, es una geodésica. En particular, $\tilde{\gamma}$ es la continuación de la geodésica γ y (4.5) se cumple para $t \in [0, \epsilon + \epsilon']$.

La condición (4.5) es cerrada (una distancia es continua por topología general) así pues existe un intervalo maximal $[0, t^*] \subset [0, d(p, q)]$ en el que se satisface, pero acabamos de probar que cualquier intervalo propio se puede extender. La única posibilidad es que (4.5) sea válido para todo $t \in [0, d(p, q)]$ y entonces $\gamma : [0, d(p, q)] \rightarrow M$ es una geodésica de longitud $d(p, q)$ que conecta p y q . \square

Después de que hemos visto propiedades minimizantes de las geodésicas vamos a dar una nueva orientación a este tema relacionando la separación entre geodésicas próximas con la curvatura. Los conceptos iniciales tiene sentido en el ámbito general semiriemanniano.

Definición: Dada una curva $c : [0, 1] \rightarrow M$ en una variedad semiriemanniana M se dice que una función $\alpha : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ es una *variación* de c si $c(t) = \alpha(t, 0)$. Si además para cada s fijado $t \mapsto \alpha(t, s)$ es una geodésica, diremos que α es una *variación geodésica*. Denotaremos con $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ a los vectores $d\alpha(\partial_1)$ y $d\alpha(\partial_2)$, respectivamente.

Intuitivamente, $\alpha(t, \epsilon) - \alpha(t, 0)$ mide la variación relativa de la curva central con respecto a otra cercana y la dirección en la que habría que moverse desde $\alpha(t, 0)$ para llegar a la “curva contigua” es $\frac{\partial}{\partial s}\alpha(t, 0)$. Nótese que éste es el vector tangente $\dot{c}(0)$ de cada curva transversal $c(s) = \alpha(t_0, s)$. Análogamente $\frac{\partial}{\partial t}\alpha$ es el vector tangente $\dot{c}(t)$ de cada curva $c(t) = \alpha(t, s_0)$.

Antes de seguir recordemos un resultado que apareció al comienzo de la prueba del Lema de Gauss (Lema 3.3.6). Con nuestra notación para variaciones es

$$(4.7) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

La prueba se reduce a la simetría de los símbolos de Christoffel después de escribir la definición de la derivada covariante.

En \mathbb{R}^n hay familias de geodésicas paralelas, como $\alpha(t, s) = (t, s)$ en \mathbb{R}^2 . El siguiente resultado explica esto como consecuencia de que la curvatura sea nula, relacionándola con cierta convexidad o concavidad (una derivada segunda) de la separación de las geodésicas contiguas.

Proposición 4.2.5 *Sea $\alpha(t, s)$ una variación geodésica en una variedad semiriemanniana y sea $V(t)$ el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial s}\alpha(t, 0)$ a lo largo de la geodésica $c(t) = \alpha(t, 0)$, entonces se cumple la relación*

$$(4.8) \quad \frac{D^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c} = 0$$

donde $\frac{D^2 V}{dt^2} = \frac{D}{dt} \left(\frac{DV}{dt} \right)$ y $\frac{D}{dt}$ representa la derivada covariante a lo largo de c .

Demostración: Escribamos c_s para indicar la curva $t \mapsto \alpha(t, s)$ con s fijado. Recordando la definición de derivada covariante y la del operador R , se tiene

$$R(Y, \dot{c}_s) = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} X - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} X$$

donde X es el campo $\dot{c}_s(t) = \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, s)$ que podemos considerar indistintamente como función de t o de s y, análogamente, $Y = \frac{\partial}{\partial s}\alpha(t, s)$. Si s está fijado, X es el campo de vectores tangentes de una geodésica y por la Proposición 3.3.3, $\frac{DX}{dt} = 0$. Entonces

$$R(Y, \dot{c}_s) = -\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t, s) = -\frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \alpha(t, s).$$

Donde se ha empleado (4.7) para la última igualdad. Particularizando en $s = 0$ se obtiene la igualdad buscada. \square

La ecuación (4.8) es crucial en la relación entre curvatura y topología. Para hacer hincapié en ello, se nombra la propia ecuación y los campos que la verifican.

Definición: Dada una geodésica c , se dice que un campo de vectores a lo largo de ella es un *campo de Jacobi* si se verifica la ecuación (4.8), llamada *ecuación de Jacobi*.

Observación: En realidad separar el concepto de campo de Jacobi en abstracto es un poco gratuito, pues se puede probar (Prop.6.2 [Wal04]) que todos ellos provienen de una variación geodésica.

Si podemos conseguir una variación geodésica que conserve fijos los puntos inicial y final (una homotopía de caminos), estaremos diciendo que hay geodésicas cercanas que pasan por los mismos puntos, como ocurre en S^2 con meridianos próximos uniendo el polo norte y el polo sur. Ésta es la idea que radica en la siguiente definición.

Definición: Sea $c : [0, 1] \rightarrow M$ conectando $p = c(0)$ y $q = c(1)$. Se dice que p y q son *puntos conjugados* si existe un campo de Jacobi J no idénticamente nulo tal que $J(0) = J(1) = \vec{0}$.

Lo que probaremos a continuación, es que la curvatura seccional negativa fuerza a que las geodésicas se separen y por tanto a que no haya puntos conjugados, justo al revés de lo que ocurre en S^2 que tiene curvatura seccional positiva.

Proposición 4.2.6 *Sea M una variedad riemanniana tal que todas sus curvaturas seccionales son menores o iguales que cero, entonces no hay puntos conjugados.*

Demostración: Si p y q fueran conjugados, por definición, existiría un campo de Jacobi J a lo largo de una geodésica c con $c(0) = p$, $c(1) = q$ y $J(0) = J(1) = \vec{0}$.

Consideremos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = G(J(t), J(t))$ donde G es la métrica. Por las propiedades de la conexión de Levi-Civita,

$$\frac{1}{2}f''(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} f'(t) = \frac{d}{dt} G\left(J, \frac{DJ}{dt}\right) = G\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt}\right) + G\left(\frac{D^2J}{dt^2}, J\right).$$

Utilizando la ecuación de Jacobi y la definición de la curvatura seccional,

$$G\left(\frac{D^2J}{dt^2}, J\right) = -G(R(J, \dot{c})\dot{c}, J) = -K(\sigma)(G(J, J)G(\dot{c}, \dot{c}) - G^2(J, \dot{c}))$$

con σ el subespacio de $T_{c(t)}(M)$ generado por $J(t)$ y $\dot{c}(t)$. El resultado es no negativo por nuestra hipótesis y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Entonces f es convexa, no negativa y $f(0) = f(1) = 0$, lo cual conduce a que f es idénticamente nula y que J también lo es. \square

Recordemos que definimos geodésica en primer lugar como una curva estacionaria para cierto funcional (a través del principio de mínima acción). Concretamente, si una geodésica conecta dos puntos, entonces $\int G(\dot{c}, \dot{c})$ es estacionario cuando se considera

sobre todas las curvas suaves que conectan esos puntos. Para deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange en la Proposición 3.1.1, esencialmente consideramos una variación de una curva preservando los extremos y después integramos por partes. Esta variación no es geodésica en general, de hecho por la Proposición 4.2.6 no puede serlo si la curvatura seccional no es positiva. Lo que estamos diciendo es que las geodésicas que unen dos puntos son estacionarias frente a todas las otras curvas cercanas que los unen. Por conveniencia notacional, demos un nombre a estas variaciones no geodésicas con extremos fijos y al funcional al que se aplican.

Definición: Una variación α de una curva $c : [0, 1] \rightarrow M$ que conecta $p = c(0)$ y $q = c(1)$ se dice que es una *variación propia* de c si $\alpha(0, s) = p$ y $\alpha(1, s) = q$. Se definen la *energía* de α y su *campo variacional*, respectivamente como

$$E(s) = \int_0^1 G(\dot{c}_s, \dot{c}_s) \quad \text{y} \quad V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha(t, 0),$$

donde para cada s fijado, c_s es la curva $c_s(t) = \alpha(t, s)$.

Nótese que E es una función $E : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ y V es un campo a lo largo de c con $V(0) = V(1) = \vec{0}$.

Con este lenguaje, la prueba de que las curvas que satisfacen $D\dot{c}/dt = \vec{0}$ (las geodésicas) son estacionarias para la energía, es bastante directa.

Proposición 4.2.7 (primera variación de la energía) *Si V es el campo variacional de una variación propia de una curva $c : [0, 1] \rightarrow M$ en una variedad semiriemanniana,*

$$E'(0) = -2 \int_0^1 G(V, \frac{D\dot{c}}{dt}) dt.$$

Demostración: Vamos a probar la fórmula más general:

$$(4.9) \quad E'(s) = -2 \int_0^1 G\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D\dot{c}_s}{dt}\right) dt.$$

Empleando (4.7),

$$\frac{d}{ds} E(s) = 2 \int_0^1 G\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \dot{c}_s\right) dt = 2 \int_0^1 G\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \dot{c}_s\right) dt.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} G\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \dot{c}_s\right) dt = \int_0^1 G\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \dot{c}_s\right) dt + \int_0^1 G\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D\dot{c}_s}{dt}\right) dt.$$

Al ser una variación propia, $\frac{\partial}{\partial s} \alpha(0, s) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha(1, s) = \vec{0}$ y el primer miembro se anula. Despejando y sustituyendo en la fórmula anterior se obtiene (4.9). \square

Proposición 4.2.8 (segunda variación de la energía) *Con la notación de la proposición anterior, si c es una geodésica*

$$E''(0) = -2 \int_0^1 G\left(V, \frac{D^2V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}\right) dt.$$

Demostración: Partimos de (4.9) en la prueba de la Proposición 4.2.7. Derivando,

$$E''(s) = -2 \int_0^1 G\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D \dot{c}_s}{dt}\right) dt - 2 \int_0^1 G\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{D \dot{c}_s}{dt}\right) dt.$$

La primera integral se anula para $s = 0$ porque $c_0 = c$ y $D\dot{c}/dt = \vec{0}$ por ser una geodésica. Usando las definiciones y (4.7),

$$\frac{D}{ds} \frac{D \dot{c}_s}{dt} = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Sustituyendo $s = 0$ se consigue la fórmula buscada. \square

Utilizando estos resultados, vamos a ver que la curvatura condiciona de algún modo lo lejos que pueden estar los puntos.

Teorema 4.2.9 (Bonnet-Myers) *Sea M una variedad riemanniana completa y conexa de dimensión n y supongamos que existe $r > 0$ tal que*

$$R_{ij}v^i v^j \geq (n-1)r^{-2}$$

para todo $p \in M$ y todo vector $\vec{v} = v^i \partial_i \in T_p(M)$ con $G(\vec{v}, \vec{v}) = 1$. Entonces $d(p, q) \leq \pi r$ cualesquiera que sean $p, q \in M$.

Observación: Para la esfera usual de radio r se verifica la condición del teorema y la conclusión es óptima porque para cualquier par de puntos antipodales p y q se tiene $d(p, q) = \pi r$.

En la demostración emplearemos un resultado auxiliar que es básicamente de álgebra lineal.

Lema 4.2.10 *Sean $Z_m = Z_m^i \partial_i$, $m = 1, 2, \dots, n$ campos de vectores que en p dan una base ortonormal de $T_p(M)$ con la métrica G de una variedad semiriemanniana M y sea $X = X^i \partial_i$ otro campo de vectores. En p se verifica la igualdad*

$$R_{ij}X^i X^j = \sum_{m=1}^n G(Z_m, R(Z_m, X)X)$$

donde R_{ij} son las componentes del tensor de Ricci.

Demostración: Es un hecho conocido de álgebra lineal que si F es una aplicación lineal autoadjunta en un espacio de dimensión finita, su traza es $\sum_i \langle \vec{e}_i, F(\vec{e}_i) \rangle$ para cualquier base ortonormal $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

En nuestro caso tomamos $F(Z) = R(Z, X)X$ y $\langle X, Y \rangle = G(X, Y)$ en el espacio vectorial $T_p(M)$. La aplicación F es autoadjunta por la Proposición 4.1.2 ya que para cada $Y = Y^i \partial_i$

$$G(Y, F(Z)) = Y^i R_{ijkl} Z^k X^j X^l = Z^k R_{klij} Y^i X^j X^l = G(Z, F(Y))$$

y el resultado se sigue de la definición del tensor de Ricci como una traza. \square

Demostración del Teorema 4.2.9: Por el Corolario 4.2.4, existe una geodésica minimizante $c : [0, 1] \rightarrow M$ que conecta dos puntos dados $p = c(0)$ y $q = c(1)$. Sea $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ una base ortonormal de $T_p(M)$ con \vec{w}_1 proporcional a $\dot{c}(0)$. Consideramos los campos de vectores en c dados por $V_i(t) = \text{sen}(\pi t)W_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, donde $W_i(t)$ es el transporte paralelo de \vec{w}_i desde $c(0)$ a $c(t)$ a lo largo de c . Por la definición del transporte paralelo,

$$\frac{DW_i}{dt} = 0, \quad \frac{DV_i}{dt} = \pi \cos(\pi t)W_i(t) \quad \text{y} \quad \frac{D^2V_i}{dt^2} = -\pi^2 V_i(t).$$

Cada uno de los campos V_i es campo variacional de alguna variación propia que se hallaría resolviendo una ecuación diferencial (nótese que $V_i(0) = V_i(1) = \vec{0}$ permite que sea propia). La Proposición 4.2.8 con $V = V_i$ y el hecho de que c sea minimizante, aseguran

$$0 \leq -2 \int_0^1 G(V_i, -\pi^2 V_i + R(V_i, \dot{c})\dot{c}) dt = \pi^2 - 2 \int_0^1 \text{sen}^2(\pi t) G(W_i, R(W_i, \dot{c})\dot{c}) dt.$$

Sumando esta desigualdad para $2 \leq i \leq n$, se tiene

$$\pi^2(n-1) \geq 2 \int_0^1 \text{sen}^2(\pi t) \sum_{i=1}^n G(W_i, R(W_i, \dot{c})\dot{c}) dt.$$

El sumando correspondiente a $i = 1$ puede añadirse porque $R(W_1, \dot{c})\dot{c}$ es nulo ya que $W_1(t)$ y $\dot{c}(t)$ son proporcionales para cada t , por ser $\frac{d}{dt}G(W_1, \dot{c}) = 0$, y R es antisimétrico.

Por el Lema 4.2.10, el sumatorio se escribe en términos del tensor de Ricci y de nuestras hipótesis se sigue

$$\pi^2(n-1) \geq 2 \int_0^1 \text{sen}^2(\pi t) (n-1) r^{-2} G(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) dt = (n-1) r^{-2} (\ell(c))^2.$$

Recordando que $\ell(c) = d(p, q)$, se deduce el resultado. \square

Sabiendo un poco de topología algebraica se deduce del teorema anterior una propiedad del grupo fundamental.

Corolario 4.2.11 *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.9, la variedad M es compacta y tiene grupo fundamental finito.*

Demostración: Según el Teorema 4.2.9 la propia variedad en su totalidad es un conjunto acotado con la distancia riemanniana, entonces el teorema de Hopf-Rinow (Teorema 4.2.2) implica que M es compacta.

Sea \widetilde{M} la variedad que constituye el recubridor universal de M y $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ la aplicación recubridora (véase el apéndice A de [O’N83] para las definiciones). Se puede dotar a \widetilde{M} de una métrica riemanniana dada por $\widetilde{G}(\vec{v}, \vec{w}) = G(d\pi(\vec{v}), d\pi(\vec{w}))$ donde G es la métrica en M . Esto hace que M y \widetilde{M} sean localmente isométricas (π define siempre un difeomorfismo local por definición de aplicación recubridora) y por tanto que \widetilde{M} también satisfaga las hipótesis del Teorema 4.2.9, lo cual implica, como antes, que \widetilde{M} es compacta y de aquí, que $\text{card}(\pi^{-1}(\{p\})) < \infty$ para cada $p \in M$ (si fuera infinito habría un punto de acumulación y no sería aplicación recubridora). Una de las propiedades del recubridor universal es que este cardinal coincide con el del grupo fundamental. \square

Terminamos enunciando otros dos teoremas que relacionan la curvatura seccional y la topología de una variedad (véanse [dC92] y [Wal04] para las demostraciones y [Ber03] para otros enunciados).

Una variedad completa simplemente conexa puede ser bien diferente de \mathbb{R}^n (por ejemplo S^n), sin embargo una condición adicional sobre la curvatura es suficiente para caracterizar \mathbb{R}^n .

Teorema 4.2.12 (Hadamard) *Sea M una variedad riemanniana completa y simplemente conexa tal que todas sus curvaturas seccionales son menores o iguales que cero, entonces $\exp_p : T_p(M) \rightarrow M$ define un isomorfismo, en particular es difeomorfa a \mathbb{R}^n .*

En la misma línea (pero mucho más profundo en su demostración), hay un resultado que caracteriza las esferas.

Teorema 4.2.13 (teorema de la esfera) *Sea M una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa de dimensión n . Si sus curvaturas seccionales máxima y mínima, K_{max} y K_{min} , satisfacen $K_{min} > \frac{1}{4}K_{max}$ entonces M es homeomorfa a la esfera S^n .*

El teorema es óptimo, en el sentido de que existiría un contraejemplo si permitimos $K_{min} = \frac{1}{4}K_{max}$. Sólo muy recientemente, con técnicas muy avanzadas, se ha conseguido reemplazar “homeomorfa” por “difeomorfa” en la conclusión del teorema.

4.3. Las ecuaciones de campo

Según la teoría clásica de la gravitación, una masa puntual en el origen genera un campo de potencial $\Phi = -GM/r$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $G = 6.670 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ es la constante de gravitación universal y M es el valor de la masa. Esto significa que la trayectoria de una partícula de prueba en este campo, viene determinada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Para utilizar el convenio de sumación, introducimos $\delta^{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta^{ij} = 0$ si $i \neq j$ (que corresponde a los g^{ij} para la métrica euclídea) y escribimos $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Entonces

$$(4.10) \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\delta^{ij}\partial_j\Phi.$$

Si el campo gravitatorio no estuviera generado por una masa puntual, habría que sumar o integrar la contribución de todas las masas (quizá infinitesimales) que generan el campo para obtener Φ . Cuando la partícula de prueba se mueve fuera de la región donde están estas masas, todas las posibilidades quedan representadas por la *ecuación de Poisson*

$$(4.11) \quad \delta^{ij}\partial_i\partial_j\Phi = 0, \quad \text{es decir} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Concretamente, la función $\Phi(\vec{x}) = -G \int \rho(\vec{y}) \|\vec{x} - \vec{y}\|^{-1} d\vec{y}$ resuelve esta ecuación para \vec{x} fuera del soporte de la función de densidad ρ . Físicamente es natural preguntarse también por el caso en que \vec{x} está en el soporte de ρ , por ejemplo si queremos estudiar la fuerza gravitatoria en el interior de la Tierra. Entonces la solución anterior corresponde a la ecuación de Poisson general

$$(4.12) \quad \delta^{ij}\partial_i\partial_j\Phi = 4\pi G\rho \quad \text{o más claramente,} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho.$$

Parametricemos las trayectorias de partículas cercanas bajo la acción de un potencial Φ mediante una función $\alpha(t, s) = (x^1(t, s), x^2(t, s), x^3(t, s))$ de forma que para cada $s = s_0$ fijo $t \mapsto \alpha(t, s_0)$ sea la ecuación de movimiento de una partícula. En otras palabras, estamos considerando variaciones de una curva como las de la sección anterior donde t representa ahora el tiempo y s cambia de partícula (de curva).

Siguiendo la analogía, el campo asociado a partículas contiguas es $V = \frac{\partial\alpha}{\partial s}(t, 0)$ y la “aceleración relativa” es d^2V/dt^2 . En coordenadas, empleando (4.10), esta aceleración es

$$\frac{d^2V^i}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x^i}{\partial s}(t, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{s=0} \left(\delta^{ik} \partial_k \Phi(x^1(t, s), x^2(t, s), x^3(t, s)) \right) = -\delta^{ik} (\partial_j \partial_k \Phi) V^j.$$

Entonces $d^2V^i/dt^2 = A_j^i V^j$ y la ecuación de Poisson en ausencia de masas (4.11) es $A_i^i = 0$. En términos físicos ésta es una ley de conservación para el flujo de la intensidad de campo, algo así como que toda la fuerza gravitatoria que entra en una región cerrada debe también salir.

En el marco de la relatividad general, las trayectorias vienen dadas por geodésicas y, según la Proposición 4.2.5, las variaciones geodésicas satisfacen

$$\frac{D^2V^i}{dt^2} = -R_{jkl}^i \dot{c}^j \dot{c}^l V^k.$$

El análogo natural de $A_i^i = 0$ es en este contexto que la contracción $R_{jil}^i \dot{c}^j \dot{c}^l$ se anule. Como el vector velocidad \dot{c} es arbitrario, se obtienen las *ecuaciones de campo en el vacío*

$$(4.13) \quad \boxed{R_{ij} = 0} \quad 1 \leq i, j \leq 4.$$

Teniendo en cuenta la simetría $R_{ij} = R_{ji}$, constituyen 10 ecuaciones en derivadas parciales que son intrínsecamente muy complicadas debido a su no linealidad y la métrica de Schwarzschild es una de las pocas soluciones explícitas de interés físico que se conocen. Puede resultar chocante que al pasar de la gravedad newtoniana a la relativista tengamos que cambiar una ecuación (la de Poisson) por 10 ecuaciones. La razón es que en el primer caso tenemos que determinar una función potencial Φ , mientras que en el segundo debemos determinar toda la estructura riemanniana definida por la métrica que está dada por 10 funciones g_{ij} (de nuevo teniendo en cuenta las simetrías). Éste es en parte el precio a pagar por una teoría de la gravitación independiente de las coordenadas.

En el interior de una masa o, por la equivalencia masa-energía, cuando hay energía radiante, las ecuaciones en el vacío (4.13) deberían sustituirse por un análogo de (4.12) y consecuentemente R_{ij} debería ser proporcional al *tensor de energía-momento* T_{ij} que, sin entrar en detalles (véase [Sch85], [HT90]), da las densidades (más bien flujos) de energía y momento lineal. Sin embargo la ecuación natural $R_{ij} = KT_{ij}$ con K constante, o equivalentemente $R^{ij} = KT^{ij}$, no puede ser cierta ya que ciertas razones físicas (esencialmente la conservación de la energía-momento) imponen $T_{;i}^{ij} = 0$ mientras que se sabe que $R_{;i}^{ij} = \frac{1}{2}g^{ij}R_{,i}$ donde R es la curvatura escalar. La posibilidad más inmediata es reemplazar R^{ij} por el llamado *tensor de Einstein* $G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R$ que ya cumple $G_{;i}^{ij} = 0$. Con algunos argumentos físico-matemáticos [Sch85], se deduce que para que en el límite para velocidades pequeños las geodésicas de la relatividad general tiendan a las trayectorias newtonianas, debe tenerse $K = 8\pi G$ (siempre bajo las unidades relativistas con las que $c = 1$). En definitiva, las ecuaciones de campo generales son

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi GT_{ij}.$$

Multiplicando por g^{ij} para despejar R , es fácil obtener la formulación equivalente

$$(4.14) \quad \boxed{R_{ij} = 8\pi G(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T)} \quad \text{con } T = g^{ij}T_{ij}.$$

De esta forma es más claro que cuando $T_{ij} = 0$ (ausencia de masas y energías en el punto de prueba), se obtienen las ecuaciones de campo en el vacío.

D. Hilbert dedujo las ecuaciones de campo a partir de un principio de mínima acción [Fra12], algo así como postular que la gravedad intenta curvar el espacio tiempo lo menos posible, lo cual es física y matemáticamente muy atractivo.

La complicación de las ecuaciones de campo sugiere que busquemos soluciones con simetrías especiales. El caso de simetría radial en el espacio es particularmente interesante y tiene interés tanto en la gravedad a escala local como en los modelos cosmológicos.

Aunque es posible dar bases teóricas rigurosas al significado de la simetría radial [MTW73, Box 32.3], procederemos aquí de modo intuitivo.

La métrica usual en una superficie esférica (en \mathbb{R}^3) de radio L es en coordenadas esféricas $L^2 d\theta^2 + L^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Consideremos una curva, en \mathbb{R}^3 para fijar ideas, parametrizada por longitud de arco con parámetro u (y por tanto métrica inducida du^2). Si “pegamos” las superficies esféricas anteriores ortogonalmente en los puntos de la curva y les asignamos un radio en función de u , la métrica obtenida será:

$$du^2 + (L(u))^2 d\theta^2 + (L(u))^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

que con el cambio de variable (carta) natural $r = L(u)$ se escribe como

$$(4.15) \quad B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad \text{con } B(r) > 0.$$

Al añadir a este espacio una función coordenada temporal, consideramos métricas de la forma

$$(4.16) \quad g_{11}dt^2 + 2g_{12}tdr + 2g_{13}td\theta + 2g_{14}td\varphi + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

con g_{11} negativa.

Si estudiamos un fenómeno gravitatorio estático entonces las funciones g_{ij} no deben depender de la coordenada tiempo t que hemos introducido. Además $g_{12} = g_{13} = g_{14} = 0$ porque en otro caso la falta de invariancia con respecto a la inversión del tiempo $t \mapsto -t$ indicaría algún tipo de “sentido de movimiento”. Por otro lado, si extendemos la simetría radial hasta pedir que el tiempo avance al mismo ritmo en todos los puntos a la misma “distancia” r (en la misma esfera) entonces la hipótesis debería ser que g_{11} sólo depende de r .

En definitiva, bajo estas hipótesis se llega a que la métrica debería tener la forma

$$(4.17) \quad -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

En términos físicos, la métrica correspondiente a la gravedad ejercida por una masa esférica estática y homogénea en el exterior de ella se ajusta a las hipótesis, pues la propia

simetría del problema sugiere que no hay direcciones distinguibles ni posibles cambios en el tiempo (con una Tierra estática y homogénea el norte o el sur son meramente convencionales).

Nuestra experiencia con la gravedad añade otra hipótesis no relacionada con la simetría. La atracción gravitatoria disminuye con la distancia y cuando r es grande es despreciable, así pues (4.17) se debería parecer en esas condiciones a la métrica de Minkowski que en esféricas es $-dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ y surge la condición natural $A(+\infty) = B(+\infty) = 1$. Dicho de otra forma, cuando la gravedad es muy pequeña, debemos recuperar la métrica de la relatividad especial.

Teorema 4.3.1 *Si una métrica de la forma (4.17) satisface (4.13) con $A, B \in C^2(\mathbb{R}^+)$ tales que $A(r), B(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow +\infty$, entonces es la métrica de Schwarzschild*

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

donde r_0 es una constante.

Demostración: Consideramos la ordenación natural $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, r, \theta, \varphi)$ de las funciones coordenadas que ya ha aparecido antes implícitamente (en relatividad es también muy común utilizar la numeración de 0 a 3).

El lagrangiano correspondiente a las métricas (4.17) es $L = -A\dot{t}^2 + B\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\begin{cases} \ddot{t} + \frac{A'}{A} \dot{t} = 0, & \ddot{r} + \frac{A'}{2B} \dot{t}^2 - \frac{r}{B} \dot{\theta}^2 + \frac{B'}{2B} r^2 - \frac{r}{B} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, & \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

De aquí se obtiene que los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{B'}{2B}, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{r}{B} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{44}^3 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{34}^4 &= \Gamma_{43}^4 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Ahora por la Proposición 4.1.4 con $g = -r^4 AB \sin^2 \theta$, se deduce tras algunos cálculos tediosos que $R_{ij} = 0$ para $i \neq j$ mientras que

$$(4.18) \quad \begin{cases} R_{11} = \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB}, & R_{22} = -\frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB}, \\ R_{33} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + 1, & R_{44} = R_{33} \sin^2 \theta. \end{cases}$$

Las ecuaciones de campo (4.13) se traducen en $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$ que dan lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales para A y B . Eliminando A'' de R_{11} y R_{22} por medio de una combinación lineal, se llega a una ecuación particularmente sencilla:

$$0 = \frac{B}{A}R_{11} + R_{22} = \frac{A'}{rA} + \frac{B'}{rB} = \frac{(AB)'}{rAB}$$

que implica que AB es constante. De la condición $A, B \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow +\infty$ se deduce $B = A^{-1}$. Sustituyendo en la ecuación $R_{22} = 0$ se sigue $-(rA)' + 1 = 0$ y se obtiene finalmente $A(r) = 1 + r_0/r$ donde r_0 es una constante arbitraria.

Es fácil comprobar que las funciones halladas realmente verifican las ecuaciones y que por tanto no hemos introducido soluciones extrañas. \square

En la gravitación clásica el problema de los dos cuerpos (dos cuerpos que interactúan gravitatoriamente) admite soluciones explícitas bien conocidas, mientras que en el contexto de la relatividad general este problema es ya demasiado difícil y hay que conformarse con el caso de un cuerpo representado por la métrica de Schwarzschild. Por ello parece pretencioso (y seguramente lo es) obtener una solución de las ecuaciones de campo que represente la gravedad a escala cosmológica: la geometría del Universo. La suposición bajo la cual se aborda este problema es la llamada *hipótesis cosmológica* consistente en suponer que el espacio es homogéneo e isótropo, es decir, que los puntos son indistinguibles entre sí y lo mismo se aplica a las direcciones. Basta mirar al cielo nocturno para ver estrellas y planetas que dan al traste con un ajuste perfecto a la hipótesis cosmológica pero datos astronómicos (como la radiación de fondo) sugieren que es correcta a gran escala.

La isotropía es la simetría radial y por tanto nos centraremos en coordenadas espaciales que respondan a métricas de la forma (4.15). Por otro lado, la homogeneidad implica que la curvatura escalar debe ser constante (si variase, unos puntos serían distinguibles de otros). Resulta que esto es suficiente para determinar B .

Proposición 4.3.2 *Si una variedad tridimensional admite una métrica del tipo (4.15) y tiene curvatura escalar R constante, entonces $B(r) = (1 - Rr^2/6)^{-1}$.*

Demostración: En vez de realizar los cálculos partiendo de cero, vamos a aprovechar la prueba del Teorema 4.3.1. Tomemos $A = 1$ en (4.17), entonces $\Gamma_{ij}^k = 0$ si $i = 1$ ó $j = 1$ y la Proposición 4.1.4 implica $R_{ij} = 0$ para estos índices. Además el resto de las componentes del tensor de Ricci coinciden con las correspondientes del tensor de Ricci para la métrica (4.15) porque los g_{ij} no dependen de t y $|g|$ es igual para ambas métricas. Por tanto, teniendo en mente (4.18),

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{1}{B} \cdot \frac{B'}{rB} + \frac{2}{r^2} \cdot \left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B} + 1 \right) = \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B} \right).$$

Esta ecuación se reescribe como $(Rr^3/6 - r + r/B)' = 0$ que integrando implica el resultado. \square

De nuevo, como en (4.16), postulamos que podemos introducir una coordenada temporal t de forma que $g_{12} = g_{13} = g_{14} = 0$, ya que en otro caso la longitud de un vector dependería del sentido espacial en el que apuntase. También extendemos la homogeneidad suponiendo que el tiempo transcurre a la misma velocidad en cada punto, en términos matemáticos, que g_{11} no depende de r , θ y φ . En principio la curvatura escalar sí podría depender de t y consideramos métricas de la forma

$$-A(t)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - R(t)r^2/6} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Un cambio $\int \sqrt{A} \mapsto t$ permite suponer $A = 1$ y un cambio posterior $r \mapsto C(t)r$ con $C(t) = \sqrt{6/|R(t)|}$ si $R \neq 0$, lleva finalmente a las *métricas de Robertson-Walker*

$$(4.19) \quad \boxed{-dt^2 + C^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2/6} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)} \quad \text{con } k \in \{-1, 0, 1\}$$

como candidatas a ser la métrica del Universo.

Es fácil ver que cualquier recta $t = \tau$ con r , θ y φ constantes, define una geodésica temporal. Según la interpretación de la relatividad general, en estas coordenadas, cada punto espacial del Universo permanece inmóvil y sólo transcurre el tiempo. En estas condiciones y suponiendo que la influencia de la energía radiante en el universo actual es despreciable, la elección físicamente natural del tensor de energía-momento es que todas sus componentes sean nulas excepto $T_{00} = \rho(t)$ que representa cierta densidad [Sch85]. Con este tensor T_{ij} las ecuaciones de campo (4.14) para (4.19) dan lugar a dos ecuaciones diferenciales sencillas que admiten una solución explícita [FN79]. Esta solución tiene un valor en el pasado para el que la métrica colapsa porque $C(t) \rightarrow 0$ y $\rho(t) \rightarrow \infty$. Esto es lo que se llama el *Big Bang*. Si $k = 1$, además hay un valor en el futuro con la misma propiedad, lo que se llama el *Big Crunch*. En los casos $k = 0$ y $k = -1$, $C(t)$ es monótona creciente, lo cual se interpreta como la expansión del Universo ya que una geodésica con $t = t_0$ que conecta dos puntos tiene longitud proporcional a $C(t_0)$.

Los datos astronómicos de principios de los años 90 del siglo XX (y otros datos más precisos posteriores), sugerían que el Universo responde con gran aproximación al caso $k = 0$ de (4.19) pero durante esa misma década, mediciones realizadas a partir de la observación de supernovas muy lejanas, mostraban un desacuerdo con las ecuaciones de campo. Es como si la expansión del Universo tuviera una aceleración añadida que da lugar a un crecimiento de $C(t)$ incompatible con las ecuaciones. Hasta hoy no se ha encontrado una explicación satisfactoria de este fenómeno.