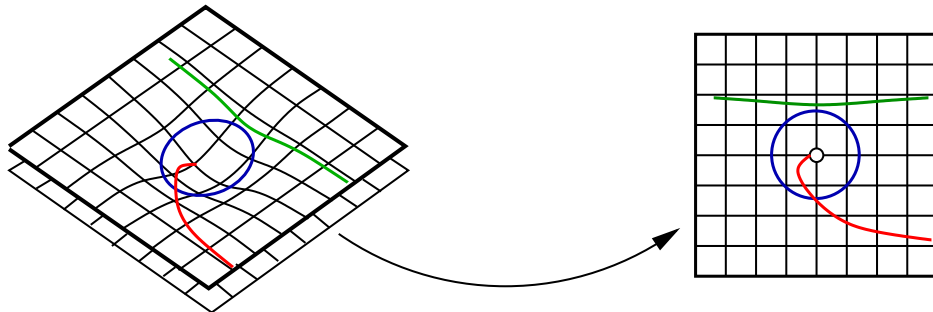


# Capítulo 3

## Geometría Riemanniana

Imaginemos una hondonada suave en el terreno. Los objetos más lentos que pasasen cerca quedarían atrapados, mientras que los más rápidos se desviarían menos de su trayectoria natural rectilínea. El problema mecánico es intrínsecamente bidimensional, pues el movimiento de las partículas tiene lugar en una superficie. Sin embargo la mecánica de Newton más elemental (la de  $F = ma$ ), lleva a considerar las tres coordenadas  $x, y, z$  de nuestro  $\mathbb{R}^3$  ambiente y a introducir las fuerzas de reacción del suelo en la dirección de la normal, que al igual que las tensiones de cuerdas y otras fuerzas poco intuitivas<sup>1</sup> de los cursos básicos de mecánica, confunden a los principiantes.



Supongamos unos seres que vivieran en un plano subterráneo paralelo al de la hondonada y que pudieran percibir las proyecciones (sombras) de las trayectorias. Posiblemente concluirían que existe un “sol” en el centro de la hondonada que ejerce una fuerza gravitatoria atractora, pues todo lo que pasa cerca del presunto sol desvía su trayectoria hacia él. Por supuesto, esta fuerza gravitatoria es ficticia y se explica a partir de una deformación geométrica que es susceptible de ser medida intrínsecamente. Éste es el punto de vista de la relatividad general, que se deshace de la gravedad como una fuerza

---

<sup>1</sup>El principio de acción y reacción dice por ejemplo que si empujamos una pared, la pared nos responde empujándonos a nosotros. Por más que los profesores nos dieran la razón convincente de que si no fuera así, la pared se tendría que mover, lo cierto es que resulta extraño pensar que a la pared le entren ganas de empujarnos.

real y explica sus efectos afirmando que el espacio-tiempo se curva en las cercanías de una masa.

La búsqueda de elegir libremente las coordenadas y la naturalidad de un tratamiento intrínseco, acerca la mecánica a la geometría diferencial. En esta dirección, hay una solución elegante y físicamente muy interesante del problema mecánico que involucra longitudes de vectores tangentes. Matemáticamente, una vez fijada una manera de medir vectores en el espacio tangente de una variedad, lo que se llama una *métrica*, tendremos trayectorias naturales de las partículas libres, que llamaremos *geodésicas*. Inventando una derivada especial adaptada a la métrica, la *derivada covariante*, se recupera el *principio de inercia* que dice que en ausencia de fuerzas la derivada de la velocidad (la aceleración) es cero, de esta forma las geodésicas son el análogo de las rectas de la geometría euclídea.

Una métrica expresa cierta deformación con respecto a la geometría euclídea a la que más adelante daremos carácter tensorial. Las bases de todo ello, y en realidad de la propia geometría diferencial, las asentó B. Riemann en una famosa lección inaugural sin apenas fórmulas (véase [Spi79b, Ch.4]). En su honor se llama *geometría riemanniana* a la geometría de las variedades dotadas de una métrica. Más de sesenta años después, A. Einstein formuló la relatividad general; una teoría geométrica de la gravitación que postula que la masa y la energía deforman el espacio-tiempo dotándole de una estructura de variedad cuatridimensional con una métrica bien distinta de la euclídea.

### 3.1. Mecánica y métricas

Supongamos una partícula de masa  $m$  en un campo con energía potencial  $U(x, y, z)$ . Según los cursos básicos de Física, su ecuación de movimiento viene dada por la solución de

$$(3.1) \quad m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

donde emplearemos la notación de los físicos, heredada de los trabajos de Newton, consistente en señalar una o dos derivadas con respecto al tiempo con uno o dos puntos sobre la función dada. Consideremos ahora el *lagrangiano*, la diferencia entre la energía cinética y la potencial:

$$L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

Entonces las ecuaciones de Newton (3.1) son equivalentes a

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ con } q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z.$$

Los matemáticos formalistas se mostrarán reacios a escribir una derivada con respecto a la derivada de una función pero el sentido está claro, simplemente por ejemplo  $\partial L/\partial \dot{x}$  significa la parcial de  $L$  con respecto a la cuarta variable y sustituir en su lugar  $\dot{x}$ .

En principio parece que no hay ninguna ventaja en escribir (3.2) en lugar de (3.1), sin embargo el siguiente resultado básico de cálculo de variaciones nos dará una nueva visión.

**Proposición 3.1.1** *Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$  sea  $\mathcal{C} = \{F = (q^1, \dots, q^n) : q^j \in C^2([a, b]), F(a) = \vec{c}, F(b) = \vec{d}\}$ . Supongamos que  $\int_a^b L$  con  $L = L(t, F(t), \dot{F}(t))$  alcanza un máximo o un mínimo en  $\mathcal{C}$  para cierta  $F$ , entonces  $F$  es solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:*

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^k} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

*Demostración:* Si la integral alcanza un extremo en  $\mathcal{C}$  para  $F = F_0(t)$  entonces para cualquier función regular  $\alpha = \alpha(t)$  con  $\alpha(a) = \alpha(b) = \vec{0}$  se cumple que la función real

$$f(\epsilon) = \int_a^b L(t, F_0(t) + \epsilon \alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon \dot{\alpha}(t)) dt$$

alcanza un extremo en  $\epsilon = 0$ . Nuestros conocimientos del primer curso de cálculo, llevan a  $f'(0) = 0$ . Derivando bajo el signo integral y con una integración por partes

$$0 = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \alpha^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{\alpha}^k \right) = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \right) \alpha^k$$

donde  $\alpha^k$  son las componentes de  $\alpha$ . como éstas son arbitrarias, la única posibilidad para que la integral sea siempre nula es que se cumpla (3.3).  $\square$

La gran ventaja es que las ecuaciones de Euler-Lagrange manifiestan que cierto funcional es estacionario y tal condición es independiente de las coordenadas. Por ejemplo los máximos y mínimos (y los valores estacionarios en general) de  $f(x)$  son los mismos que los de  $f(3x - \sin x)$  o  $f(-x - x^3)$ . Es decir, aunque no lo parezca, (3.2) sigue describiendo el movimiento de la partícula si empleamos por ejemplo coordenadas cilíndricas  $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$ . La idea de que las leyes físicas se puedan interpretar sin referencia a coordenadas específicas, en términos de los extremos de cierto funcional es muy atractiva y de una forma u otra ha sobrevivido a las revoluciones relativista y cuántica del siglo XX.

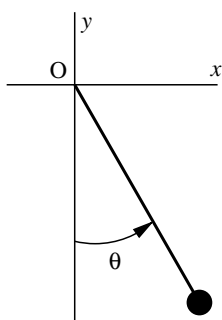
Tanto (3.1) como (3.2) se generalizan sin dificultad al caso de  $N$  partículas, simplemente la dimensión pasa de 3 a  $3N$  y  $U$  quizá refleje también interacciones entre las partículas. Establecer ligaduras significa forzar relaciones entre las variables haciendo

que el *espacio de configuración*, el conjunto donde potencialmente se mueven las variables, pase de  $\mathbb{R}^{3N}$  a una subvariedad suya. Por ejemplo, una partícula en  $\mathbb{R}^3$  restringiría su movimiento a  $S^1$  si tiene la ligadura de ser una cuenta de collar. Desde el punto de vista físico-teórico, las ligaduras equivalen a poner una barrera de potencial, es decir, a declarar que se necesitaría demasiada energía para salirse de esa subvariedad tomando  $U$  muy grande fuera de ella [Arn78, 17]. Por tanto es una hipótesis física natural suponer que las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.3) dan las ecuaciones de movimiento con  $L = T - U$  (energía cinética y potencial) también en el caso en que hay ligaduras, expresando  $T$  y  $U$  en términos de  $q^i$  y  $\dot{q}^i$ ,  $1 \leq i \leq n$  con  $q^i$  variables independientes que describen la configuración del sistema. A estas variables se les llama *coordenadas generalizadas* mientras que  $n$ , la dimensión de la subvariedad, se conoce como número de *grados de libertad*

En el ámbito de la mecánica clásica se llama a la hipótesis anterior *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton*. El enunciado que se encuentra para este principio en algunos libros de Física [LL76], es del tipo:

**Principio de mínima acción.** Si en los instantes  $t = t_1$  y  $t = t_2$  el sistema ocupa posiciones que se caracterizan por dos conjuntos de valores de las coordenadas, entonces entre estas posiciones el sistema se moverá de manera que la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  tendrá el menor valor posible.

Literalmente el principio no es correcto y más bien debería decir que la acción es estacionaria o mínima “localmente” (en intervalos de tiempo pequeños). Se puede encontrar una buena introducción elemental en [FLS64, Ch.19].



Aunque en geometría sólo nos intereseamos en el caso  $U = 0$ , a modo de ilustración analizaremos el caso del péndulo simple, en el que hay un potencial gravitatorio.

El bien conocido esquema es una varilla inextensible sin masa de longitud  $l$  que puede girar en el plano alrededor de uno de sus extremos y tiene una partícula de masa  $m$  en el otro. La energía cinética de esta partícula es  $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  y la potencial  $mgy$ . ahora bien, las coordenadas  $(x, y)$  de la partícula no son variables independientes: el sistema sólo tiene un grado de libertad. La manera natural de describirlo es con el ángulo que forma la varilla con la vertical. Se tiene  $x = l \sin \theta$ ,  $y = -l \cos \theta$  y el lagrangiano en términos de la coordenada

generalizada  $\theta$  es

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m((l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2) + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta.$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.3) conducen a la conocida ecuación del péndulo,  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ , sin necesidad de pensar en la tensión de la varilla.

Si nos olvidamos de  $U$ , que refleja que el sistema está inmerso en un campo de fuerzas, el lagrangiano en cada punto es una forma cuadrática definida positiva en  $\dot{q}^i$ . En términos geométricos, en cada punto indica una manera de medir vectores tangentes, o equivalentemente (por polarización) un producto escalar entre ellos. Motivados por la relatividad, en primera instancia exigimos la no degeneración en vez de la positividad a este producto escalar.

**Definición:** Un campo tensorial  $G$  de tipo  $(0, 2)$  en una variedad se dice que es una *métrica* si sus componentes  $g_{ij}$  forman una matriz simétrica no singular en cada punto.

**Definición:** Una *variedad semiriemanniana* (o *variedad pseudoriemanniana*) es una variedad dotada de una métrica y se dice que es *variedad riemanniana* si la métrica es definida positiva en cada punto.

Si en una carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  una métrica tiene componentes  $g_{ij}$ , para cada par de campos de vectores  $X = X^i \partial_i$ ,  $Y = Y^i \partial_i$  se tiene, por definición  $G(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$ . Si queremos referirnos a a métrica  $G$  sin mencionar las componentes de los vectores a los que se aplica, en pura ortodoxia notacional se escribe  $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  ya que  $dx^i(X) = X^i$  y  $dx^i(Y) = Y^i$ , como covectores, y  $\otimes$  significa el producto del resultado de aplicar dos tensores. Esta operación se define en general para cualquier par de tensores<sup>2</sup>.

**Ejemplo:** En  $\mathbb{R}^n$  con la carta trivial la métrica que corresponde al producto escalar usual es  $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  con  $g_{ij} = 1$  si  $i = j$  y 0 en otro caso. ésta es la *métrica usual* y la más empleada, pero hay una infinidad de formas de convertir  $\mathbb{R}^n$  en una variedad semiriemanniana.

La forma clásica de expresar una métrica, a veces denostada por los matemáticos, reemplaza productos tensoriales por productos habituales en un sentido formal. Así la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$  se escribiría  $dx^2 + dy^2$  y la métrica  $dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + 10 dy \otimes dy$  sería  $dx^2 + 2dxdy + 10dy^2$ . También es habitual el nombre común  $ds^2$  en vez de  $G$ , incluso si la métrica no es definida positiva.

Al igual que el lagrangiano  $L = T$  (energía cinética) determina las ecuaciones de movimiento intrínsecamente, sin estar forzados a emplear un sistema de coordenadas externo; también una métrica determina unas curvas destacadas en una variedad riemanniana. En ambos casos, lo que se obtiene es una generalización de las rectas. En el primer caso por analogía con el *principio de inercia* (en ausencia de fuerzas el movimiento es rectilíneo y uniforme) y en el segundo por la propiedad minimizante de la distancia que estudiaremos más adelante.

---

<sup>2</sup>Si  $T$  es un tensor de tipo  $(r, s)$  y  $S$  es un tensor de tipo  $(u, v)$ , se llama *producto tensorial* de  $T$  y  $S$  al tensor  $T \otimes S$  de tipo  $(r+u, s+v)$  cuyo valor es  $T(\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) \cdot S(\tilde{\varphi}^{r+1}, \dots, \tilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_{s+1}, \dots, \vec{v}_{s+v})$  en  $(\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^{r+u}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{s+v})$ .

**Definición:** Dada una variedad semiriemanniana  $M$ , se dice que una curva parametrizada  $c : I \rightarrow M$  es una *geodésica* si en cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  con  $\text{Im } c \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ , las funciones  $(\phi \circ c)(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$  con  $g_{ij}$  las componentes de la métrica de  $M$ .

El diccionario geométrico de la mecánica es entonces:

Mecánica		Geometría
espacio de configuración	$\rightarrow$	variedad riemanniana $M$
grados de libertad	$\rightarrow$	dimensión de $M$
coordenadas generalizadas	$\rightarrow$	funciones coordenadas
energía cinética	$\rightarrow$	métrica en $M$
ecuaciones de movimiento	$\rightarrow$	geodésicas

Ejemplo: Sea  $G$  la métrica usual en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $L = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  con  $q^1 = x$ ,  $q^2 = y$ . Los cálculos para las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 2\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

y lo mismo con  $y$ . Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

que se resuelven como  $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a_0, b_0)$ . Esto concuerda con el principio de inercia. En coordenadas polares, un cálculo prueba  $L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$  y las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} & \Rightarrow \quad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} & \Rightarrow \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones tan complicadas todavía representan las mismas trayectorias rectilíneas. Por ejemplo, podemos comprobar que  $r(t) = 1/\sin \theta(t)$  con  $\cot \theta(t) = t$ , correspondiente a la recta horizontal antes mencionada, es solución.

Como anticipo de una breve introducción a la relatividad, consideremos una métrica que no es definida positiva y en la que intencionadamente una de las funciones coordenadas se llama  $t$ , lo que obliga a un pequeño cambio notacional.

**Ejemplo:** En  $\mathbb{R}^2$ , denominando a las funciones coordenadas  $(t, x)$  consideramos la métrica  $G = -e^{x^2} dt^2 + dx^2$ . Llamando  $\tau$  al parámetro de las geodésicas, éstas quedan determinadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{con} \quad L = -e^{x^2} \dot{t}^2 + \dot{x}^2.$$

La primera ecuación implica  $e^{x^2} \dot{t}^2 = K = \text{cte}$  y sustituyendo en la segunda

$$\ddot{x} + K^2 x e^{-x^2} = 0.$$

Esta fórmula implica que si  $x(0) > 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$  entonces  $\ddot{x}(0) < 0$ . En términos mecánicos, si  $x$  representa el espacio, una partícula que parte del reposo en  $\mathbb{R}^+$  se acelerará hacia el origen. La situación es simétrica en  $\mathbb{R}^-$  y entonces podemos explicar la gravedad atractiva de un sol en el origen de la recta real  $\mathbb{R}$ , convenciendo a sus habitantes de que su tiempo y espacio tienen conjuntamente la métrica anterior. Dentro de este esquema, el tiempo  $t$  es sólo una función coordenada más del espacio de configuración que se relaciona a lo largo de cada geodésica  $\gamma = \gamma(\tau)$  con el parámetro  $\tau$ .

## 3.2. Introducción a la relatividad

La relatividad especial adquirió gracias a H. Minkowski una formulación geométrica elegante en términos de una métrica. Dicho sea de paso, tal formulación no fue inicialmente del agrado de Einstein pero irónicamente fue el primer paso que permitió que años después formulase su teoría geométrica de la gravedad, la relatividad general. Por ello y por la importancia de la relatividad dentro de la cultura científica, nos entretendremos aquí con algunas deducciones matemáticas en la base de la relatividad especial.

Antes de comenzar y para el resto del capítulo, cada vez que tratemos magnitudes físicas supondremos que hemos elegido unidades, llamadas relativistas, tales que la velocidad de la luz  $c$  es 1.

$$\text{unidades relativistas} \quad \longleftrightarrow \quad c = 1.$$

Como en el sistema internacional  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  (en 1983 se redefinió el metro para que  $c$  tuviera este valor exacto) no es una constante adimensional, imponiendo  $c = 1$  se pueden medir metros en segundos y viceversa:  $299\,792\,458 \text{ m} = 1 \text{ s}$ , haciendo hincapié en la idea de que espacio y tiempo son todo uno y se habla del *espacio-tiempo*; idea que, por cierto, es de Minkowski<sup>3</sup> aunque a menudo se atribuye a Einstein.

---

<sup>3</sup>Minkowski afirmó: “A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo, están condenados a desvanecerse en meras sombras y sólo una especie de unión de ambos conservará una realidad independiente” [LEMWed].

La relatividad especial está basada en el famoso artículo de 1905 “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento” (véase [LEMWed]), posiblemente el más conocido y citado de Einstein. En él se resuelve una paradoja sobre los fenómenos electromagnéticos de una forma físicamente muy radical. Estos fenómenos vienen determinados por dos campos de vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dependientes del tiempo que satisfacen las *ecuaciones de Maxwell* [FLS64], que en ausencia de cargas y corrientes son:

$$(3.5) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Una consecuencia de estas ecuaciones, fundamental en el mundo contemporáneo, es que existen las ondas electromagnéticas. Este hecho se comprobó años después de que J.C. Maxwell enunciase sus ecuaciones, que son la traducción de hechos experimentales simples con cálculo vectorial [FLS64] [AW01, Ch. 1]. No es casual que Maxwell diera unas de las primeras pruebas del teorema de Stokes. Maxwell también conjeturó que la luz es una onda electromagnética, como se comprobó después, porque de (3.5) se deduce que estas ondas viajan con velocidad  $c$  (uno en unidades relativistas).

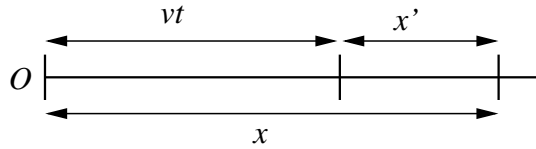
**Proposición 3.2.1** *Si  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  satisfacen las ecuaciones de Maxwell (3.5) entonces cada una de sus componentes satisface la ecuación de ondas*

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad \text{donde} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

*Demostración:* Derivando con respecto al tiempo la última ecuación y sustituyendo la penúltima,  $\partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$ . La relación del cálculo vectorial [AW01]  $\Delta \vec{F} = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$  implica que  $\vec{E}$  es una solución vectorial de la ecuación de ondas.

La simetría  $\vec{E} \mapsto -\vec{B}$ ,  $\vec{B} \mapsto \vec{E}$  de (3.5) implica que lo mismo ocurre para  $\vec{B}$ .  $\square$

La paradoja a la que nos hemos referido es que un observador que viaja a velocidad  $v$  por el eje  $X$  mediría un espacio  $x' = x - vt$ :



Sin embargo esta transformación no deja invariante la ecuación de ondas (3.6). Por ejemplo, transforma la solución  $u = \operatorname{sen}(x - t) + \operatorname{sen}(x + t)$  en  $u = \operatorname{sen}(x' + vt - t) + \operatorname{sen}(x' + vt + t)$  que ya no satisface (3.6) cambiando  $x$  por  $x'$ .

Einstein no dudó de que las ecuaciones de Maxwell (3.5) fueran correctas y tuvo la revolucionaria idea de que  $x' = x - vt$  era incorrecta y que los únicos cambios de sistema de referencia admisibles eran los cambios lineales de espacio y tiempo que preservan



la ecuación de ondas<sup>4</sup>, en particular el tiempo también debe cambiar. Se llega así a la conclusión radical de que las longitudes e intervalos de tiempo son relativos, dependen del observador.

Si consideramos cambios en los que no participen  $y$  y  $z$ , lo cual corresponde naturalmente al caso antes mencionado de un observador que se mueve por el eje  $X$ , veremos que la invariancia de la ecuación de ondas implica la de cierta métrica.

**Proposición 3.2.2** *Si la ecuación de ondas (3.6) es invariante por cierto cambio de variables lineal en  $t$  y en  $x$ , entonces tal cambio de variables también deja invariante la métrica de Minkowski*

$$(3.7) \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

*Demostración:* Digamos que el cambio viene dado por  $t = at' + bx'$ ,  $x = ct' + dx'$ . Al imponer que  $u = \text{sen}(t - y)$  siga siendo solución de (3.6) tras el cambio, se obtiene  $a^2 - b^2 = 1$  y procediendo de forma análoga con  $\text{sen}(t - x)$  y  $\text{sen}(t + x)$  se obtiene  $ac = bd$  y  $d^2 - c^2 = 1$ . Al aplicar el cambio traspuesto (intercambiando  $b$  y  $c$ ) sobre  $ds^2$ , queda

$$ds^2 = -(a^2 - b^2)dt'^2 + 2(bd - ac)dt'dx' + (d^2 - c^2)dx'^2 + dy^2 + dz^2,$$

que con la información anterior es  $-dt'^2 + dx'^2 + dy^2 + dz^2$ . Por otro lado, la matriz de componentes  $D = (g_{ij})$  de  $ds^2$  cumple  $D = D^{-1}$  y entonces para cualquier matriz no singular  $A$ , la invariancia por  $A$ ,  $A^t D A = D$ , equivale a la invariancia por  $A^t$ ,  $A D A^t = D$ , sin más que invertir y despejar.  $\square$

La métrica de Minkowski (3.7), formalmente es igual que la usual cambiando  $t$  por  $t\sqrt{-1}$ . Ahora bien, sabemos que las transformaciones que dejan fija la métrica usual son los movimientos del plano. Si nos limitamos al caso de movimientos directos que preservan el origen (una traslación o cambiar de signo uno de los ejes, no añade mucho físicamente) entonces se tienen los giros y el cambio  $x \mapsto t\sqrt{-1}$ ,  $y \mapsto x$  que pasa la métrica usual a la de Minkowski, los convertirá en transformaciones que preservan (3.7).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[x \mapsto t\sqrt{-1}, y \mapsto x]{} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sqrt{-1} \text{sen } \alpha \\ \sqrt{-1} \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

---

<sup>4</sup>Einstein afirmó en su artículo: “está claro que las ecuaciones deben ser *lineales* por las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo”. Intuitivamente, esto significa que si por ejemplo  $t'$  no fuera lineal en  $x$  entonces  $\partial t' / \partial x \neq \text{cte}$  y el tiempo (en movimiento) transcurriría a diferentes velocidades en diferentes puntos, con lo que podríamos diseñar un experimento con diferente resultado dependiendo del sitio en el que se hiciese. Para no faltar a la verdad, es necesario aclarar que Einstein en su artículo no trabajó con la ecuación de ondas, sino con la consecuencia de que la velocidad de las ondas electromagnéticas, en particular de la luz, debería ser la misma, uno en nuestras unidades, para todos los observadores inerciales.

Para que el cambio sea real, queda forzado  $\alpha = i\beta$  con  $\beta \in \mathbb{R}$  y entonces las transformaciones buscadas preservando (3.7) son  $t' = t \cosh \beta - x \sinh \beta$  y  $x' = -t \sinh \beta + x \cosh \beta$ . Para ver el significado físico de  $\beta$ , observemos que por definición de velocidad relativa  $v$ , la recta  $x = vt$  se debe aplicar en  $x' = 0$ . Es decir,  $\tanh \beta = v$  y se obtiene, usando  $1 - \tanh^2 \beta = 1/\cosh^2 \beta$ , que las ecuaciones anteriores equivalen a las *transformaciones de Lorentz*

$$(3.8) \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Como su nombre indica, estas transformaciones fueron introducidas por H.A. Lorentz antes de que Einstein escribiera su famoso artículo, incluso G. FitzGerald había propuesto la segunda en 1889 (recordamos que Einstein nació en 1879). Sin embargo fue Einstein quien las dotó de su pleno significado físico actual. Para apreciarlo, deshagamos las unidades relativistas. Notemos que  $t$  y  $t'$  tienen unidades de tiempo, escribimos convencionalmente  $[T]$ , y  $x$  y  $x'$  de espacio  $[L]$ . Para que todo cuadre,  $vx$  debe ser  $[T]$  en lugar de  $[L^2T^{-1}]$  y  $\sqrt{1 - v^2}$  debe ser adimensional. Entonces, sin unidades relativistas

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Incluso a la velocidad de un avión,  $v/c^2$  y  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  difieren de 0 y de 1 en menos de  $10^{-12}$ , por ello estas fórmulas son una ínfima perturbación de las relaciones clásicas  $t' = t$ ,  $x' = x - vt$  para las velocidades habituales de objetos macroscópicos.

Einstein comprobó en su famoso artículo que las transformaciones de Lorentz dejan invariantes no sólo a la ecuación de ondas sino a las ecuaciones de Maxwell, un hecho también avanzado por Lorentz y H. Poincaré. El empleo de tensores permite hacer esta invariancia manifiesta [AW01, 4.6] [FLS64, 26], como más tarde notó el propio Einstein.

Limitarnos a observadores que se mueven por el eje  $X$  es una simplificación no esencial, pues siempre podemos pasar a este caso con una rotación de los ejes espaciales  $x, y, z$ , lo cual preserva (3.7). En suma, los cambios admisibles de sistema de referencia en la relatividad especial son los movimientos del *espacio de Minkowski* definido como  $\mathbb{R}^4$  dotado con la métrica (3.7).

La relatividad general de alguna forma parte de la relatividad especial pero no es una generalización suya sino una teoría geométrica de la gravitación. Fue creada por Einstein en 1915 y a veces se señala como su aportación más original. En las líneas del ejemplo de la introducción, la relatividad general explica la gravitación como una curvatura, una deformación en la manera de medir, más que como una fuerza en sí misma. Cerca de un cuerpo muy masivo las longitudes son más pequeñas y por eso los cuerpos parecen acelerarse hacia ella. Sin entrar en las motivaciones de la teoría (véase [MTW73]), lo cierto es que explica algunas desviaciones infinitesimales respecto a lo que predice la

teoría de la gravitación creada por I. Newton que permaneció inamovible durante más de dos siglos.

Una curvatura del espacio-tiempo la entendemos como una modificación de la métrica de Minkowski. El esquema seguido en el caso clásico sugiere que el movimiento de las partículas está representado por geodésicas, pero en este caso, ni siquiera con la métrica de Minkowski nos interesan todas ellas.

Consideremos las geodésicas del espacio de Minkowski que parten del origen y tiene  $y = z = 0$ , éstas vienen dadas por  $t = a\tau$ ,  $x = b\tau$  con  $a$  y  $b$  constantes y  $\tau$  el parámetro de la geodésica. Claramente  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  no se realiza físicamente como el movimiento de una partícula: en el instante cero está en todo el eje  $X$ . En general,  $v = b/a$  indica la velocidad y la imposibilidad de tomar  $|v| \geq 1$  en (3.8) (nada va más rápido que la luz), restringe el rango a  $|b| < |a|$  que corresponde a valores negativos cuando la métrica de Minkowski se aplica a los vectores tangentes de la geodésica. Multiplicar  $\tau$  por una constante no afecta a  $v$  y si normalizamos de manera que el resultado negativo de la métrica de Minkowski al que nos hemos referido sea  $-1$ , se obtiene  $t(\tau) = \tau/\sqrt{1-v^2}$ ,  $x(\tau) = -v\tau/\sqrt{1-v^2}$ . Estas fórmulas coinciden con las transformaciones de Lorentz para un observador que mide tiempo  $\tau$  y espacio  $0$ , es decir, que viaja con la partícula. En resumen, bajo la normalización de que los vectores tangentes “midan”  $-1$ , el parámetro  $\tau$  de la geodésica se interpreta físicamente como el llamado *tiempo propio*, el tiempo medido desde la partícula material cuya trayectoria representa la geodésica. Quizá es más sencillo entender su significado intuitivo pensando que se cumple

$$-\Delta\tau^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

donde  $\Delta$  indica incremento, y que  $t = \tau$  corresponde al caso  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  en el que no hay incrementos de espacio. El caso límite  $|b| = |a|$  daría  $|v| = 1$  que corresponde a un rayo de luz y el vector tangente tendría “longitud” nula con la métrica de Minkowski.

La siguiente definición contempla estos conceptos cuando se trabaja con una perturbación de la métrica de Minkowski.

**Definición:** Se dice que una variedad semiriemanniana  $M$  de dimensión 4 es una *variedad de Lorentz* si en cada punto la signatura de su métrica  $G$  coincide con la de la métrica de Minkowski (3.7). Se dice que  $\gamma$  es una *geodésica nula* si  $G(\vec{v}, \vec{v}) = 0$  para cada uno de sus vectores tangentes  $\vec{v}$  y se dice que es una *geodésica temporal* si  $G(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ . En este último caso cuando  $G(\vec{v}, \vec{v}) = -1$  se dice que está parametrizada por el *tiempo propio*.

Observación: Más adelante (Corolario 3.3.4) veremos que a lo largo de cualquier geodésica  $G(\vec{v}, \vec{v})$  permanece constante, por tanto el paso de una geodésica temporal a otra parametrizada por el tiempo propio es sólo un cambio de unidades (lineal) en el parámetro. La definición de variedad de Lorentz se extiende a variedades de dimensión

$n$  con signatura  $(n - 1, 1)$ . Es decir, tales que al diagonalizar la métrica en cada punto haya  $n - 1$  signos positivos y uno negativo.

El postulado básico de la relatividad general es que el espacio-tiempo es una variedad de Lorentz con el siguiente diccionario geométrico:

Relatividad		Geometría
espacio-tiempo	→	variedad de Lorentz $M$
gravedad	→	métrica en $M$
rayos luminosos	→	geodésicas nulas
partículas materiales	→	geodésicas temporales
tiempo propio	→	parámetro de geodésicas temporales normalizadas

Evidentemente la pregunta es cómo se halla la métrica que corresponde a la gravitación. La respuesta más sincera es que resolviendo una ecuación tan complicada que es casi inútil en la práctica y no puede competir con el modelo de Newton. Volveremos sobre ello más adelante. Por ahora veremos sin justificación, la métrica introducida por K. Schwarzschild que según la teoría, corresponde a la deformación del espacio-tiempo en el exterior de una masa esférica estática y homogénea despreciando la influencia de otras masas.

**Definición:** Sea  $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$  con las funciones coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  siendo  $r, \theta, \phi$  las coordenadas esféricas habituales. Se llama *métrica de Schwarzschild* a

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

donde  $r_0$  es una constante, llamada *radio de Schwarzschild*, que físicamente representa  $2Gm$  con  $G$  la constante de gravitación universal y  $m$  la masa<sup>5</sup>.

Observación: Para  $r_0 = 0$  (masa cero), la métrica de Schwarzschild no es más que la métrica de Minkowski en esféricas.

Para estudiar movimientos radiales, los que en términos espaciales sólo dependen del radio  $r$  (la “distancia” al origen), nos podemos olvidar de  $\theta$  y  $\varphi$  y para mayor simplicidad considerar que el espacio-tiempo está representado por  $(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

**Definición:** En  $M = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  se llama *métrica de Schwarzschild bidimensional* a

$$(3.9) \quad -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

<sup>5</sup>En breve veremos que ésta es la única interpretación posible de  $r_0$  si queremos recuperar la concordancia aproximada con la teoría de Newton.

Una primera sorpresa es que aparte de la singularidad natural en  $r = 0$ , que también existe en la fuerza de Newton, haya otra en  $r = r_0$ . ¿Por qué no nos percatamos de ella? En el sistema internacional  $G = 6.670 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ , y si queremos calcular  $2GM$  con unidades de longitud debemos deshacer las unidades relativistas, tomando  $2GM/c^2$  que para las masas de la Tierra, Júpiter y el Sol da como valores de  $r_0$  respectivamente,  $8.87mm$ ,  $2.82m$  y  $2.96km$ . Entonces para notar esa singularidad la Tierra debería tener el tamaño de una canica, Júpiter debería caber en nuestra habitación o el Sol tendría que poderse recluir en una ciudad.

Los avances astronómicos han mostrado que tales objetos, tan diferentes de los astros que nos rodean y bien conocidos en ciencia ficción, existen realmente. Cuando el radio de una estrella se reduce por un colapso más allá de  $r_0$  entonces la singularidad aparece y se dice que es un *agujero negro* [HE73], [HT90]. La esfera  $r = r_0$  en la que la métrica es singular se llama *horizonte de sucesos* del agujero negro. En rigor habría que omitir esta esfera de la variedad que representa el espacio-tiempo aunque veremos más adelante que la singularidad no es tan crítica como parece.

Una cuestión básica es cómo cae un objeto que parte del reposo por efecto de la gravedad. El problema matemático consiste en calcular las geodésicas de (3.9).

**Proposición 3.2.3** *Si  $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau))$  es una geodésica de (3.9) parametrizada por el tiempo propio y tal que  $r(0) = R_0 > r_0$ ,  $r'(0) = 0$ , entonces*

$$r(\tau) = R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}$$

y  $V(x)$  es la función inversa de  $f(x) = x + \sin x$ .

Observación: Para masas y distancias “normales”  $K_0$  es muy pequeño y entonces  $V(K_0\tau)$  es  $K_0\tau/2$  con gran aproximación, de donde se infiere que la aceleración inicial es  $r''(0) \sim -R_0 K_0^2/8$ . Si se quiere que esto se parezca a la fórmula de Newton  $-Gm/R_0^2$ , se debe cumplir  $R_0 K_0^2 = 8GM/R_0^2$  que después de operar lleva a  $r_0 = 2GM$ , por eso la única manera de interpretar físicamente  $r_0$  es como  $2Gm$  si se quiere que la nueva teoría concuerde en el límite con la newtoniana.

*Demostración:* Las componentes de la métrica no dependen de  $t$ , entonces

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = \text{cte}$$

y por la definición del tiempo propio  $-(1 - r_0/r)\dot{t}^2 + (1 - r_0/r)^{-1}\dot{r}^2 = -1$ . Combinando estas dos ecuaciones se tiene  $\dot{r}^2 = r_0(r^{-1} - \text{cte})$  y  $r'(0) = 0$  implica que esta constante es  $R_0^{-1}$ . En resumen, hay que resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

bajo la condición inicial  $r(0) = 0$ . Con un cambio de variable  $v = V(K_0\tau)$  o equivalentemente  $\tau = (v + \sin v)/K_0$ , la ecuación anterior es por la regla de la cadena

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \frac{r_0}{K_0^2}(1 + \cos v)^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right),$$

y por sustitución directa  $r(v) = R_0 \cos^2(v/2) = R_0(1 + \cos v)/2$  es solución de esta ecuación.  $\square$

Consideremos ahora los rayos luminosos en las direcciones radiales.

**Proposición 3.2.4** *Si  $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau))$  es una geodésica nula de (3.9) con  $r(0) = R_0 > r_0$ ,  $t(0) = 0$ , entonces*

$$\pm t = r - R_0 + r_0 \log\left(\frac{r - r_0}{R_0 - r_0}\right)$$

donde el signo coincide con el de  $r'(0)/t'(0)$ , es decir, es positivo si es saliente y negativo si es entrante.

*Demostración:* Por ser una geodésica nula se tiene

$$-\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0$$

y por la regla de la cadena  $(dt/dr)^2 = (1 - r_0/r)^{-2}$ . empleando las condiciones iniciales se tiene  $\pm t = \int_{R_0}^r (1 - r_0/x)^{-1} dx$  y la integral es elemental.  $\square$

Un subproducto de la prueba es que la “velocidad”  $dr/dt$  de un rayo de luz es  $(1 - r_0/r)$ , por consiguiente se ralentiza cuanto más próximo está al horizonte de sucesos y en el límite la velocidad es nula. Esto concuerda con la imagen clásica de un agujero negro como una estrella con una gravedad tan poderosa que ni la luz puede escapar. Curiosamente P.S. Laplace ya teorizó sobre tales objetos a finales del XVIII (véase [HE73]).

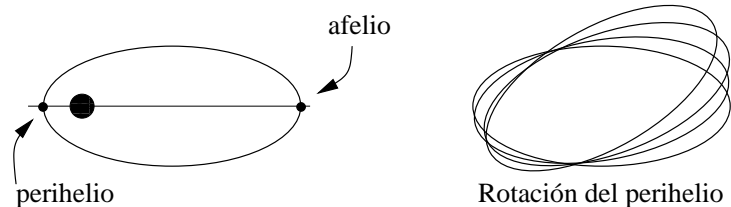
Por otro lado la Proposición 3.2.3 implica que una partícula sólo necesita un tiempo finito para llegar al horizonte de sucesos porque  $\cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right)$  toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras: una partícula puede alcanzar el horizonte de sucesos de un agujero negro en un segundo medido por un observador subido a ella pero los observadores estáticos exteriores si tuvieran instrumentos infinitamente precisos percibirían indefinidamente las señales previas a su entrada en el horizonte de sucesos sin detectar que ésta se efectúa. Esta situación choca fuertemente con nuestro sentido común y Einstein trató de evitarla en [Ein39] probando que bajo ciertas hipótesis que pudieran darse en la formación de cúmulos estelares, el horizonte  $r = r_0$  debería estar “tapado” con masa sugiriendo así que los agujeros negros eran un modelo matemático sin realidad

física. Desde el punto de vista geométrico es posible remediar los problemas y paradojas que plantea la singularidad en  $r = r_0$  utilizando unas sorprendentes cartas que permiten eliminarla (véase [HE73] §5.5).

Parte de las confusiones en la relatividad general se deben a interpretar  $t$  y  $r$  como “verdaderos” tiempos y espacios medidos por todos los observadores. La relatividad del tiempo es particularmente contraintuitiva y adquiere una dimensión más profunda que en la relatividad especial por presentarse incluso para observadores estáticos.

Terminaremos esta sección deduciendo un efecto que durante algún tiempo fue el único débil apoyo experimental a la relatividad general.

Según enunció J. Kepler en su primera ley y probó Newton a partir de su ley de gravitación, los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Los puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol se llaman *perihelio* y *afelio*, respectivamente. Debido a la influencia de otros planetas y objetos astronómicos las órbitas no son exactamente elípticas. En el siglo XIX se estudió con suma precisión la órbita de Mercurio, el planeta más afectado por la gravedad del Sol, y se observó que no era una elipse estática sino que el perihelio iba rotando levemente de revolución en revolución cierto ángulo que con los datos actuales es de  $574''$  por cada siglo. Sorprendentemente una minúscula parte de esta rotación, concretamente  $43''$  por siglo no era debida a la influencia de otros planetas. A pesar de ser un problema menor, pues habría que esperar casi 10000 años para detectar una variación de un grado, intrigó a algunos físicos.



Probaremos que la métrica de Schwarzschild tiene órbitas casi-elípticas que presentan una rotación del perihelio coincidiendo con la esperada en el caso de Mercurio. Con este propósito no podemos emplear la simplificación (3.9) porque ahora buscamos geodésicas confinadas en el plano de la eclíptica  $\theta = \pi/2$  con  $r$  y  $\varphi$  variando. Nos ocuparemos primero de la relación entre estas dos funciones sin fijarnos en la dependencia en  $\tau$ .

**Proposición 3.2.5** *Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild incluidas en el plano  $\theta = \pi/2$  verifican que  $r$  y  $\varphi$  están relacionados mediante*

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = Ar^4 + Br^3 - r^2 + r_0r$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y de  $r_0$ .

*Demostración:* Las componentes de la métrica de Schwarzschild no dependen de  $t$  ni de  $\varphi$ , entonces por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = C_1, \quad r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = C_2$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes. Sustituyendo los valores de  $\dot{t}$  y  $\dot{\varphi}$  (y  $\dot{\theta} = 0$ ) en  $L$  se deduce

$$-C_1^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + C_2^2 r^{-2} = -1$$

y operando

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (C_1^2 - 1) + \frac{r_0}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} + \frac{r_0 C_2^2}{r^3}.$$

Dividiendo entre  $(d\varphi/d\tau)^2 = C_2^2/r^4$  se obtiene el resultado.  $\square$

Seguiremos ahora [FN79] con un argumento debido a C. Møller que es bastante directo y general no necesitando la hipótesis de que la órbita sea casi circular lo cual no sería aplicable a Mercurio.

El cambio  $u = 1/r$  en la proposición anterior conduce a

$$(3.10) \quad (u')^2 = A + Bu - u^2 + r_0 u^3.$$

El perihelio y el afelio corresponden a los valores extremos de  $u$ , digamos  $u_p$  y  $u_a$ , en lo que la derivada se anula, por consiguiente el polinomio  $P$  del segundo miembro de (3.10) es divisible por  $(u - u_p)(u - u_a)$ . Además  $P$  tiene como suma de sus raíces  $r_0^{-1}$  por las fórmulas de Vieta y esto es suficiente para determinar la tercera raíz, permitiendo escribir (3.10) como

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1 \quad \text{donde} \quad P(u) = (u - u_a)(u_p - u)(1 - r_0(u + u_a + u_p))$$

y el signo será positivo si  $u$  es creciente ( $u' > 0$ ) y negativo en caso contrario.

Partiendo del afelio, al pasar al perihelio siguiente  $u$  crece mientras que cuando se pasa del perihelio anterior al afelio presente  $u$  decrece. Con esta idea en mente, integrando la ecuación anterior se obtienen las siguientes fórmulas para la variación del ángulo:

$$\varphi_{\text{per.sig.}} - \varphi_{\text{afe.}} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}, \quad \varphi_{\text{afe.}} - \varphi_{\text{per.ant.}} = \int_{u_p}^{u_a} \frac{du}{-\sqrt{P(u)}}.$$

Sumando ambas fórmulas tenemos que la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos es

$$\Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} - 2\pi.$$



Para Mercurio las medidas astronómicas indican  $u_a = 1.43 \cdot 10^{-11}m$  y  $u_p = 2.19 \cdot 10^{-11}m$  y el  $r_0$  correspondiente al Sol (la masa que genera la métrica de Schwarzschild) es, como habíamos mencionado,  $2.96 \cdot 10^3m$ . Calculando numéricamente la integral (con ayuda de un ordenador), se obtiene  $\Delta = 5.04 \cdot 10^{-7}$ . Teniendo en cuenta que Mercurio tarda 0.24 años en dar una vuelta alrededor del Sol, cada siglo habrá dado 416.67 vueltas y la variación del ángulo se multiplicará por este número, siendo

$$\text{Variación secular} = 2.10 \cdot 10^{-4} \text{rad} = 43.32''$$

lo que coincide con gran precisión con la cantidad observada experimentalmente. En realidad no es necesario utilizar el ordenador para estimar  $\Delta$ , con aproximaciones de Taylor sencillas se puede deducir

$$\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2.$$

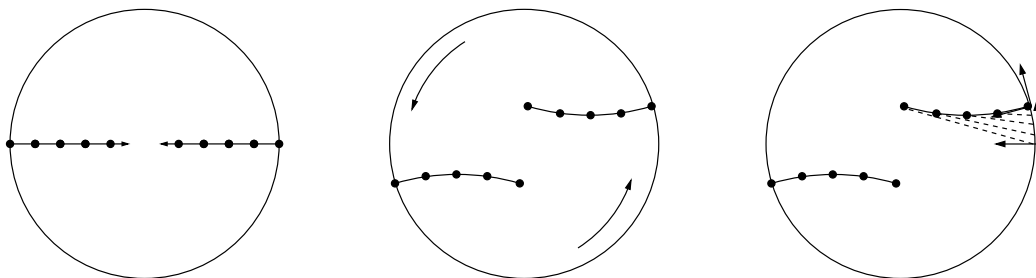
En particular el efecto está en relación inversa con la distancia al Sol.

### 3.3. Geodésicas y conexiones

Para estudiar la variación de un vector no sólo debemos tener en cuenta la variación de sus componentes sino la del propio sistema de coordenadas. Consideremos por ejemplo en  $\mathbb{R}^2$  una base  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  que va rotando con el tiempo, entonces la derivada del vector  $\vec{v} = (a(t), b(t)) = a(t)\vec{e}_1 + b(t)\vec{e}_2$  no es  $(a'(t), b'(t))$  sino  $a'(t)\vec{e}_1 + b'(t)\vec{e}_2 + a(t)\vec{e}_1' + b(t)\vec{e}_2'$ . Como  $B$  es una base, existen  $\Gamma_j^k$  con  $j, k \in \{1, 2\}$  tales que  $\vec{e}_j'(t) = \Gamma_j^1\vec{e}_1(t) + \Gamma_j^2\vec{e}_2(t)$  y la derivada en la base  $B$  es  $(a', b') + (a\Gamma_1^1 + b\Gamma_2^1, a\Gamma_1^2 + b\Gamma_2^2)$ .

Con esta definición la derivada es *absoluta* en el sentido de que se transforma tensorialmente (como un vector, el vector aceleración). En mecánica, estos términos que se añaden a la derivada de las componentes en sistemas que rotan da lugar a la llamada *aceleración de Coriolis*. Una de las demostraciones más claras de su existencia es considerar en una plataforma circular dos chorros de agua que apuntan al centro desde puntos diametralmente opuestos. Al hacer girar la plataforma, los chorros se desvían dejando de converger en el centro.

Para un observador en el borde, la velocidad del chorro sigue la dirección del eje radial y es constante, por ello la desviación es sorprendente desde su punto de vista (lo mismo que lo es la aceleración de Coriolis desde la superficie de la Tierra).



Un observador exterior nota que hay una velocidad tangencial inicial imprimida por el giro y la trayectoria de cada gota es la recta que debería ser (no exactamente radial por efecto de la velocidad tangencial) pero cada una parte de puntos diferentes por la variación del sistema de coordenadas.

Si deseamos derivar campos de vectores en una variedad, la dependencia será en el punto más que en un parámetro  $t$  y debemos especificar en la dirección en la que movernos. Si el campo es  $V = V^k \partial_k$  y elegimos la dirección  $\partial_i$ , entonces un razonamiento como el anterior sugiere que esta “derivada direccional absoluta” debiera tener como componente  $k$ -ésima

$$\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k V^j$$

para ciertos  $\Gamma_{ij}^k$  que indican la variación del sistema de coordenadas  $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ . La elección de unos  $\Gamma_{ij}^k$  que den resultados coherentes en cartas compatibles es lo que da lugar a una conexión afín: una manera absoluta (tensorial) de derivar en una variedad. Sin embargo una definición a través de estas funciones sería demasiado fea (aunque posible [Spi79b, p.233]) y se prefiere habitualmente otra más sintética y operativa pero menos transparente.

**Definición:** Una *conexión afín* en una variedad  $M$  es una aplicación que asigna a cada par de campos de vectores  $X, Y$  un tercero, denotado mediante  $\nabla_X Y$ , tal que se verifican las siguientes propiedades

- a)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- b)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- c)  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias  $M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tomando  $f$  muy concentrada alrededor de un punto y  $g = 0$ , se deduce de las propiedades anteriores que  $\nabla_X Y$  en cada punto  $p$  sólo depende de  $X|_p$  y del comportamiento local de  $Y$  alrededor de  $p$ . La terminología “conexión” proviene de T. Levi-Civita que en un trabajo pionero introdujo un concepto de paralelismo generalizado en variedades que permitía *conectar* vectores paralelos de espacios tangentes cercanos.

Ahora reconciliamos esta definición con los comentarios previos.

**Lema 3.3.1** *Sea una conexión afín  $\nabla$  y sean  $X$  y  $V$  campos de vectores que se expresan como  $X = X^i \partial_i$  y  $V = V^i \partial_i$  con una carta dada  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , entonces*

$$\nabla_X V = \left( \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k V^j \right) X^i \partial_k$$

donde  $\Gamma_{ij}^k$  es la componente  $k$ -ésima de  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ .

*Demostración:* Usando las propiedades de la definición de conexión afín,  $\nabla_X V = X^i \nabla_{\partial_i} (V^j \partial_j) = X^i (V^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \partial_j)$  y basta renombrar la variable muda  $j$  como  $k$  en el último sumando.  $\square$

Cuando uno tiene que hacer cálculos explícitos con conexiones, por ejemplo en relatividad, la notación se vuelve un poco tediosa y existe una especie de taquigrafía bastante extendida que hace más pintorescos los textos de cálculo tensorial.

Se escribe  $f_{,i}$  en lugar de  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  cuando no se quiere hacer explícito el sistema de coordenadas y  $V_{;i}^k$  en lugar de  $V_{,i}^k + \Gamma_{ij}^k V^j$ .

**Definición:** Dado un campo de vectores  $V = V^k \partial_k$  en una variedad  $M$ , se llama *derivada covariante* de  $V$  al tensor de tipo  $(1, 1)$  que tiene componentes  $V_{;i}^k$ . Si  $c : I \rightarrow M$  es una curva parametrizada, se llama *derivada covariante* de  $V$  a lo largo de  $c$ , y se denota  $\frac{DV}{dt}$ , al vector  $\nabla_u V$  en  $c(t)$  con  $u$  el vector tangente a  $c$  en  $c(t)$ .

A veces a la derivada covariante a lo largo de una curva o a la derivada covariante en general, se le llama *derivada absoluta*.

Por la definición libre de coordenadas de  $\nabla$  y el Lema 3.3.1, realmente las  $V_{;i}^k$  se transforman como componentes de un tensor bajo cambios de carta. Esto obliga a que los  $\Gamma_{ij}^k$  tengan que cumplir una regla de transformación no tensorial (véase la Prop. 4.5 de [Aub01] y su prueba).

Si escribimos  $x^i(t)$  y  $V^k(t)$  para indicar  $(x^i \circ c)(t)$  y  $V^k(x^1(t), \dots, x^n(t))$ , entonces aplicando la regla de la cadena al Lema 3.3.1

$$(3.11) \quad \frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) V^j(t) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) \partial_k \Big|_{c(t)}.$$

En particular para determinar  $DV/dt$  basta con que  $V$  esté definido en la imagen de  $c$ , no hace falta tener realmente un campo vectorial en toda la variedad. Si  $DV/dt = 0$  se dice que  $V(t)$  es el *transporte paralelo* de  $V(0)$  a  $V(t)$  a lo largo de  $c$ . Éste es el concepto generalizado de paralelismo al que antes nos hemos referido.

De todas las conexiones afines posibles, hay sólo una que es natural en una variedad semiriemanniana. Implícitamente, sin repetirlo cada vez, consideraremos que es esta conexión afín la que usamos a partir de ahora.

**Teorema 3.3.2** *Sea  $M$  una variedad semiriemanniana con métrica  $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Existe una única conexión  $\nabla$ , llamada conexión de Levi-Civita, tal que*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i \quad y \quad \frac{d}{dt} G(V, W) = G\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + G\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$$

donde  $V = V(t)$  y  $W = W(t)$  son campos de vectores arbitrarios definidos sobre una curva. Además los  $\Gamma_{ij}^k$  dando la  $k$ -ésima componente de  $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ , llamados símbolos de Christoffel, responden a la fórmula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{mk}(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$$

donde  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$ .

*Demostración:* Supongamos primero la existencia de  $\nabla$ . De  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  y las propiedades de una conexión, se deduce (véase la definición de  $[X, Y]$  en el capítulo anterior)

$$(3.12) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Por otro lado, considerando curvas integrales de un campo vectorial  $X$ , la hipótesis sobre la derivada de un producto escalar equivale a

$$(3.13) \quad X(G(Y, Z)) = G(\nabla_X Y, Z) + G(Y, \nabla_X Z).$$

Con unos cálculos tediosos pero simples, utilizando (3.12) y (3.13) permutando las variables, se sigue [dC92, p.55]

$$(3.14) \quad \begin{aligned} 2G(Z, \nabla_Y X) &= X(G(Y, Z)) + Y(G(Z, X)) - Z(G(X, Y)) \\ &\quad - G([X, Z], Y) - G([Y, Z], X) - G([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Tomando  $Y = \partial_i$ ,  $X = \partial_j$ ,  $Z = \partial_k$ , esta igualdad afirma

$$g_{kl}\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ji,k}).$$

Usando la simetría  $g_{ij} = g_{ji}$  y multiplicando por la matriz inversa de la métrica, se obtiene la fórmula esperada.

Para la existencia, notemos primero que por dualidad (las componentes de una métrica forman una matriz no singular), la función  $Z \mapsto G(Z, X)$  determina el vector  $X$ , por tanto (3.14) define  $\nabla_Y X$ . Además, gracias a la relación  $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$ , no es difícil ver que realmente  $\nabla$  tiene las propiedades de una conexión afín.

Con el cálculo antes realizado,  $G(\partial_k, \nabla_{\partial_i}\partial_j) = G(\partial_k, \nabla_{\partial_j}\partial_i)$  de donde  $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$ . Finalmente, a partir de (3.14) se obtiene (3.13) que, como hemos dicho, equivale a la hipótesis sobre la derivada de un producto escalar.  $\square$

Para una subvariedad  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  la métrica natural, *inducida por la usual* (a veces también llamada *métrica usual*) es  $G(\vec{v}, \vec{w}) = E(di(\vec{v}), di(\vec{w}))$  donde  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  es la inclusión y  $E = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$  es la métrica euclídea habitual. En esta situación la derivada covariante no es más que la proyección sobre el espacio tangente de la derivada

usual. De esta forma, la primera propiedad se sigue de la igualdad de las derivadas parciales cruzadas y la segunda de la regla para derivar un producto.

En términos generales, la segunda condición pedida a la conexión de Levi-Civita es una suerte de *compatibilidad* (de hecho a veces se denomina así) entre la derivada covariante y la usual al derivar productos escalares. La primera condición es algo más difícil de interpretar geoméricamente<sup>6</sup>. Sólo diremos que tiene que ver con la existencia de un sistema de coordenadas con el que  $V_{;i}^k(p) = V_{;i}^k(p)$  en un punto  $p$  [Spi79b, Ch.5] lo cual equivale a que los símbolos de Christoffel se anulen en  $p$  o a que se pueda encontrar un *sistema normal de coordenadas* en el que los vectores canónicos  $\partial_i|_p$  son ortonormales, en el sentido de que  $G(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = 0$  si  $i \neq j$  y  $G(\partial_i|_p, \partial_j|_p) = \pm 1$ .

Recordemos que habíamos definido las geodésicas como curvas estacionarias para cierto funcional de energía, con la conexión afín asociada a la métrica ahora también las podemos entender como las curvas con aceleración (derivada del vector tangente) nula, obteniéndose así un principio de inercia generalizado. De nuevo las geodésicas se muestran como una generalización de las rectas parametrizadas.

**Proposición 3.3.3** *Las geodésicas en una variedad semiriemanniana  $M$  son las curvas parametrizadas  $c : I \rightarrow M$  para las que  $DV/dt = 0$  donde  $V$  es el campo de vectores tangentes de  $c$ . Es decir, si  $(\mathcal{U}, \phi)$  es una carta y  $\phi \circ c(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ , las geodésicas son las soluciones de las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0.$$

*Demostración:* Todo lo que hay que hacer es comprobar que para el lagrangiano  $L = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$  las ecuaciones de Euler-Lagrange son  $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{d}{dt} (2g_{kj} \dot{q}^j) = 2g_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j + 2g_{kj} \ddot{q}^j, \quad \frac{\partial L}{\partial q^k} = g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir, por tanto, como

$$2g_{kj} \ddot{q}^j - g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j = -2g_{kj,i} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

En el segundo miembro podemos renombrar arbitrariamente los índices de sumación  $i$  y  $j$ . Si los intercambiamos y sumamos las ecuaciones resultantes, se deduce

$$g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{1}{2} (g_{kj,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = 0.$$

Multiplicando por  $g^{lk}$  se obtiene la ecuación del enunciado.  $\square$

---

<sup>6</sup>Una teoría de la gravitación debida a Cartan, consideraba conexiones sin esta propiedad. Más tarde Einstein intentó unificar la gravitación y el campo electromagnético mediante conexiones con  $\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$ . Tal intento, incluso en tiempos de Einstein, llegó a ser poco valorado porque no tomaba en cuenta los avances realizados en la física cuántica.

**Corolario 3.3.4** Si  $c : I \rightarrow M$  es una geodésica y  $V = V(t)$  es su campo de vectores tangentes, entonces  $G(V, V)$  es constante en  $t$  donde  $G$  es la métrica de la variedad.

*Demostración:* Basta usar  $\frac{d}{dt}G(V, V) = G\left(\frac{DV}{dt}, V\right) + G\left(V, \frac{DV}{dt}\right)$ .  $\square$

Extenderemos a partir de ahora un poco la notación denotando mediante  $\dot{c}$  el campo de vectores tangentes de una curva  $c$ . Entonces el resultado anterior implica que una geodésica  $c$  es nula si  $G(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = 0$ , temporal si  $G(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) < 0$  y parametrizada por el tiempo propio si  $G(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = -1$ .

Comparando las ecuaciones de las geodésicas de la Proposición 3.3.3 y las que sabíamos obtener con el lagrangiano, no es necesario utilizar la fórmula del Teorema 3.3.2 para calcular los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ . En muchas ocasiones esto reduce drásticamente los cálculos.

Ejemplo: El lagrangiano  $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  de la métrica usual en  $\mathbb{R}^3$  pasa a ser  $L = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$  cuando se incluye la esfera en  $\mathbb{R}^3$  con la carta en esféricas  $\phi = (\theta, \varphi)$  con el significado habitual ( $x = \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = \cos \theta$ ). En este sentido,

$$G = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

es la métrica usual en  $S^2$  (más propiamente, la inducida por la usual). Calculemos sus símbolos de Christoffel. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 4\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

que comparadas con la definición implican  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos \theta / \sin \theta$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$  y que el resto de los símbolos de Christoffel son cero.

Un cálculo directo con la fórmula del Teorema 3.3.2 habría sido trabajoso.

Como ya hemos mencionado, en subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica inducida por la usual,  $DV/dt$  puede interpretarse como la proyección ortogonal de la derivada usual del campo de vectores (evaluado en la curva) sobre el hiperplano tangente, y según la Proposición 3.3.3, las geodésicas son las curvas tales que la derivada de sus vectores tangentes (la aceleración) es siempre un vector normal (la partícula no sufre una fuerza real si está ligada a la subvariedad). Esto permite identificar sin cálculos todas las geodésicas en una esfera y alguna de ellas en un toro usual.

Más concretamente, si tenemos dos superficies de  $\mathbb{R}^3$  que son tangentes a lo largo de una geodésica de una de ellas, entonces también será geodésica en la otra.

Nuestra idea intuitiva sobre el espacio tangente  $T_p(M)$  nos hace pensar en él como en una aproximación de  $M$  en las cercanías de  $p$ , sin embargo las definiciones presentan el espacio tangente y la variedad como objetos bien distintos. Una métrica riemanniana nos provee con una estructura suficientemente fuerte que permite reflejar nuestra intuición a través de cierta aplicación del espacio tangente en la variedad.

La positividad será importante en algunos pasos, por tanto en lo que resta de sección supondremos que  $M$  es una variedad riemanniana (no sólo semiriemanniana).

Fijado un punto  $p$  en  $M$  de dimensión  $n$ , el espacio tangente  $T_p(M)$  es un espacio vectorial isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  en el que podemos definir una bola centrada difeomorfa a la bola usual en  $\mathbb{R}^n$

$$B_\epsilon = \{X|_p \in T_p(M) : G(X|_p, X|_p) < \epsilon^2\}$$

con  $\epsilon > 0$  y  $G$  la métrica de  $M$ .

**Definición:** Para  $B_\epsilon \subset T_p(M)$  como antes, se define la *aplicación exponencial*  $\exp_p : B_\epsilon \rightarrow M$  como  $\exp_p(\vec{v}) = \gamma_{\vec{v}}(1)$  donde  $\gamma_{\vec{v}}$  es la geodésica con  $\gamma_{\vec{v}}(0) = p$  y  $\dot{\gamma}_{\vec{v}}(0) = \vec{v}$ .

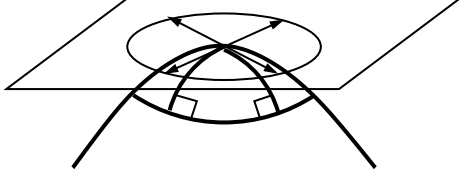
En términos mecánicos, la aplicación entre el espacio tangente en  $p$  y la variedad la llevamos a cabo lanzando una partícula con velocidad  $\vec{v}$  desde  $p$  y viendo dónde está al cabo de un segundo. La topología de la variedad puede estropear la inyectividad e incluso la buena definición de la aplicación exponencial para velocidades grandes (basta poner un agujero que impida avanzar durante un segundo). Todo lo que esperamos es que la variedad y el espacio tangente se parezcan cerca de  $p$ .

**Proposición 3.3.5** *Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p$  establece un difeomorfismo entre  $B_\epsilon$  y un entorno de  $p$  en  $M$ . Al supremo de tales valores de  $\epsilon$  se le llama radio de inyectividad en  $p$ .*

*Demostración:* Obviamente  $\gamma_{\vec{0}}$  es la función constante, y por la dependencia continua en los parámetros de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existen  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  tales que  $\gamma_{\vec{v}}(t)$  está bien definida para  $\vec{v} \in B_{\epsilon_1}$  y  $|t| < \epsilon_2$ . Por otro lado, la homogeneidad de la ecuación de las geodésicas (Proposición 3.3.3) implica que si  $\gamma_{\vec{v}}(t)$  es geodésica,  $\gamma_{\delta\vec{v}}(\delta^{-1}t)$  también lo es, y ambas coinciden por cumplir las mismas condiciones iniciales. Tomando  $\delta = \epsilon_2/2$ , el valor  $t = 1$  estará en el dominio de definición de  $\gamma_{\delta\vec{v}} = \gamma_{\delta\vec{v}}(t)$  y por tanto  $\exp_p$  estará bien definida en  $B_{\epsilon_1\epsilon_2/2}$ .

Si consideramos el espacio vectorial  $T_p(M)$  como una variedad, su espacio tangente en el origen  $O$  se identifica con él mismo (cada vector se considera como vector tangente en el origen). Ello permite dar sentido a  $d\exp_p(\vec{v})$  para  $\vec{v} \in T_p(M)$ , que por la regla de la cadena es  $\dot{c}(0)$  para  $c(t) = \exp_p(t\vec{v})$ . Por definición  $c(t) = \gamma_{t\vec{v}}(1) = \gamma_{\vec{v}}(t)$ , así pues

$\dot{c}(0) = \vec{v}$  y  $d\exp_p$  es la identidad en el origen de  $T_p(M)$ . El teorema de la función inversa asegura entonces que  $\exp_p$  es difeomorfismo local.  $\square$



Intuitivamente la imagen de una esfera por  $\exp_p$  debería ser perpendicular a las geodésicas que parten de  $p$ . Este hecho, habitualmente en una versión generalizada (véase [dC92, 3.3.5]), se conoce bajo el nombre de *Lema de Gauss*. Esto permite establecer una especie de coordenadas polares generalizadas heredadas de las del espacio vectorial  $T_p(M)$  con la métrica riemanniana particularizada en  $p$ .

**Proposición 3.3.6 (Lema de Gauss)** *Sea una aplicación  $\theta \mapsto \vec{v}(\theta) \in T_p(M)$  tal que  $\vec{v}(\theta)$  es unitario con la métrica riemanniana  $G$  de  $M$  en  $p$  y definamos  $\alpha_\theta(r) = \beta_r(\theta) = \exp_p(r\vec{v}(\theta))$ . Entonces para cada  $r$  y  $\theta$  las curvas  $\alpha_\theta(t)$  y  $\beta_r(t)$  son ortogonales, esto es,  $G(\dot{\alpha}_\theta(r), \dot{\beta}_r(\theta)) = 0$ .*

*Demostración:* Comenzamos comprobando que  $\frac{D\dot{\alpha}_\theta}{d\theta} = \frac{D\dot{\beta}_r}{dr}$ , o escrito de manera más atrayente,  $\frac{D}{d\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{D}{dr} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ , donde  $f(r, \theta) = \exp_p(r\vec{v}(\theta))$ , lo que se traduce gracias a (3.11) en

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial \theta \partial r} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^j}{\partial r} \frac{\partial f^i}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial r \partial \theta} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^j}{\partial \theta} \frac{\partial f^i}{\partial r}$$

y se sigue de  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  (la propiedad de simetría de la conexión de Levi-Civita).

Por otro lado, la segunda propiedad de la conexión de Levi-Civita asegura

$$\frac{d}{dr} G(\dot{\alpha}_\theta(r), \dot{\beta}_r(\theta)) = G\left(\frac{D\dot{\alpha}_\theta(r)}{dr}, \dot{\beta}_r(\theta)\right) + G\left(\dot{\alpha}_\theta(r), \frac{D\dot{\beta}_r(\theta)}{dr}\right).$$

Por ser  $\dot{\alpha}_\theta$  una geodésica, la primera derivada covariante se anula, y por la identidad comprobada al principio, el segundo sumando es

$$G\left(\dot{\alpha}_\theta(r), \frac{D\dot{\beta}_r(\theta)}{dr}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} G(\dot{\alpha}_\theta(r), \dot{\alpha}_\theta(r)) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} G(\dot{\alpha}_\theta(0), \dot{\alpha}_\theta(0)) = 0$$

donde se ha empleado el Corolario 3.3.4 y que  $\dot{\alpha}_\theta(0) = \vec{v}(\theta)$  es unitario.

En definitiva, se concluye que  $G(\dot{\alpha}_\theta(r), \dot{\beta}_r(\theta))$  es constante como función de  $r$ . ahora bien, si  $r \rightarrow 0^+$ ,  $\dot{\alpha}_\theta(r)$  tiende a ser idénticamente  $p$  y  $\dot{\alpha}_\theta(r) \rightarrow 0$  (si se necesitan detalles sobre este punto, obsérvese que  $d\exp_p(r\vec{v}|_p) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0^+$ ).  $\square$



Para ilustrar la utilidad de la aplicación exponencial y del Lema de Gauss, probaremos una propiedad minimizante de las geodésicas. Empleando la Proposición 3.1.1 se puede obtener que si hay una curva  $c \in C^\infty$  en una variedad  $M$  con métrica  $G$  que conecta dos puntos  $p$  y  $q$  en el sentido de que  $p = c(0)$  y  $q = c(1)$ , y que minimiza el funcional de longitud

$$(3.15) \quad \ell(c) = \int_0^1 \sqrt{G(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$$

entonces necesariamente es una geodésica (véase la Proposición 3.1.4 en [Cha08]). sin embargo, la existencia de tal minimizante no está garantizada y, de hecho, puede no existir una geodésica conectando dos puntos. Todo funciona bien cuando fijamos el punto de partida y sólo consideramos puntos de llegada cercanos.

**Teorema 3.3.7** *Sea  $B_\epsilon$  como en la Proposición 3.3.5 y  $\mathcal{U} = \exp_p(B_\epsilon)$ . Sea  $q \in \mathcal{U}$  y  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ ; entonces  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$  para toda curva diferenciable a trozos  $c : I \rightarrow \mathcal{U}$  con  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$ . Además la igualdad sólo se alcanza cuando  $c$  es una reparametrización de  $\gamma$ .*

*Demostración:* Por medio de  $\exp_p^{-1}$  la curva  $c$  se pasa a una curva en  $B_\epsilon \subset T_p(M)$ , que se puede escribir como  $r(t)\vec{v}(t)$  con  $r(t) > 0$  y  $\vec{v}(t)$  unitario (con la métrica  $G$  de la variedad). Esto es,  $c(t) = f(r(t), t)$  con  $f(r, t) = \exp_p(r\vec{v}(t))$ . De  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$  se deduce  $r(0) = 0$  y  $\gamma(t) = f(t, r(1)\vec{v}(1))$  es una geodésica que conecta  $p$  y  $q$ , en particular, por el Corolario 3.3.4,

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{G(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \int_0^1 \sqrt{G(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0))} dt = r(1).$$

El Lema de Gauss asegura que  $\partial f/\partial r$  y  $\partial f/\partial t$  son ortogonales, así pues

$$G(\dot{c}, \dot{c}) = G\left(\frac{\partial f}{\partial r}r' + \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r}r' + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = (r')^2 G\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) + G\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Ahora bien, con la notación empleada en la definición de aplicación exponencial,  $f(r, t) = \gamma_{r\vec{v}(t)}(1) = \gamma_{\vec{v}(t)}(r)$  (recuérdese que  $\gamma_{\vec{v}}(u) = \gamma_{\delta\vec{v}}(\delta^{-1}u)$  porque ambas geodésicas cumplen las mismas condiciones iniciales), y de nuevo por el Corolario 3.3.4,  $G\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) = G(\dot{\gamma}_{\vec{v}(t)}(0), \dot{\gamma}_{\vec{v}(t)}(0)) = 1$ . Entonces

$$\ell(c) = \int_0^1 \sqrt{G(\dot{c}, \dot{c})} \geq \int_0^1 \sqrt{(r')^2} = r(1) = \ell(\gamma).$$

Claramente la igualdad sólo se da si  $\partial f/\partial t$  es nulo, es decir, cuando  $\vec{v}(t)$  es constante y se tiene  $c(t) = \exp_p(r(t)\vec{v}_0)$  y  $\gamma(t) = \exp_p(r(1)\vec{v}_0)$ , lo cual responde al cambio de parámetro  $r(1)t \mapsto r(t)$ .  $\square$

