Capítulo 2

El teorema de Frobenius

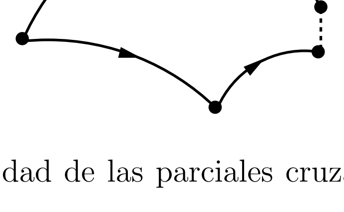
Si en el plano indicamos en cada punto una dirección (o velocidad) la trayectoria de una partícula está totalmente condicionada una vez fijado el punto de partida. En términos analíticos la ecuación diferencial $c'(t) = F\big(c(t)\big)$ determina la curva solución $c = c(t)$ al especificar $c(0)$.

Un campo de direcciones tangentes da lugar entonces a curvas, sin embargo las cosas se complican en dimensiones superiores. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^3$ consideramos los campos de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$; una superficie que los tenga como vectores tangentes ∂_1, ∂_2, se puede entender localmente como unas funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, parametrizando la superficie, tales que

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial u \\ \partial y/\partial u \\ \partial z/\partial u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Las dos primeras coordenadas de estas ecuaciones nos dicen que, salvo una traslación, $x = u$, $y = v$, por tanto podemos considerar que nuestra superficie está parametrizada por $\big(x, y, z(x, y)\big)$, es decir, que es el grafo de una función. Las ecuaciones de las terceras coordenadas piden

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x \qquad \text{que contradicen} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}.$$



Desde el punto de vista geométrico siempre podemos ordenar a una persona o a una partícula que en cada paso infinitesimal tome la dirección del vector indicado por un campo pero no podemos hacer lo mismo con superficies indicando dos direcciones (dos campos) porque hay muchas formas de avanzar y no tienen por qué llevarnos coherentemente a los mismos puntos. Si uno recuerda cómo se probaba la igualdad de las parciales cruzadas, que antes se ha violado, se empleaba que para conectar dos vértices opuestas de un rectángulo da igual ir por los lados que están encima de la diagonal que por los que están por debajo.

La situación no es nueva desde el punto de vista analítico pues ya en cálculo de varias variables se vio que dada $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ no siempre existe una función f tal que $\nabla f = F$. Cuando tal problema tiene solución se dice que F es un *campo conservativo* y ello requiere rot $F = \vec{0}$.

El teorema de Frobenius da las condiciones necesarias y suficientes para que al especificar unas direcciones, exista localmente una subvariedad cuyo espacio tangente esté generado por ellas.

2.1. Flujos de campos de vectores

Comenzamos dando un nombre, posiblemente ya conocido, a las trayectorias obtenidas a partir de un campo de vectores.

Definición: Sea $c : I \longrightarrow M$ una curva parametrizada con I un intervalo abierto y X un campo de vectores en M que se expresa como $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en cierta carta. Se dice que c es una *curva integral* de X si $(x^i \circ c)'(t) = X^i\big(c(t)\big)$.

Muchas veces, con cierto abuso de notación, se define $c'(t)$ como un vector tangente (presuponiendo la composición con las funciones coordenadas) para así librarse de los sistemas de coordenadas locales [O'N83, Ch.1] y poder escribir $c'(t) = X\big|_{c(t)}$.

El teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura, como ya hemos notado, que fijado un punto hay (localmente) una única curva integral con $c(0) = p$ y que si dos curvas integrales $c_1 : I_1 \longrightarrow M$, $c_2 : I_2 \longrightarrow M$ cumplen $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I_1 \cap I_2$ entonces coinciden en todo $I_1 \cap I_2$.

Recuérdese que ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}$ tan sencillas como $x' = x^2$, $x(0) = 1$ no tienen solución regular en todo $\mathbb{R}$, pues $x(t) = (1-t)^{-1}$ "explota" en $t = 1$. Entonces a veces I no se puede sustituir por $\mathbb{R}$ en la definición anterior. Dado $p \in M$, se dice que c es una *curva integral maximal* con $c(0) = p$ de un campo X si su dominio de definición I es el mayor posible en el sentido de la inclusión. La teoría dice que en una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes regulares lo único que puede ir mal es que la solución "explote hacia el infinito". Más concretamente en cuanto se tiene una subsucesión convergente $t_n \to l$ de valores del parámetro t que se aplica por c en una sucesión convergente, entonces c está definida en un entorno de l. En una variedad compacta no hay infinitos hacia los que escapar, ya que toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Por tanto en variedades compactas las curvas integrales maximales tienen $I = \mathbb{R}$.

Definición: Se dice que un campo de vectores en una variedad es *completo* si las curvas integrales maximales $c = c(t)$ están definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

El siguiente concepto a introducir es la aplicación correspondiente a caminar durante un tiempo t prefijado por cada curva integral. La posibilidad de que $I \neq \mathbb{R}$ impide hacer una definición global.

Definición: Sea $\mathcal{U}$ un abierto de una variedad M y sea $c_p(t)$ la curva integral maximal de X con $c_p(0) = p$. Si existe un intervalo abierto $I \in 0$ contenido en el dominio de todas las c_p con $p \in \mathcal{U}$, entonces para cada $t \in I$ se define el *flujo local* $\Phi_t : \mathcal{U} \longrightarrow M$ como $\Phi_t(p) = c_p(t)$.

Pedimos la existencia de un I que contenga algo alrededor de cero porque deseamos hacer variar t. El teorema de dependencia continua de los parámetros para ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que tomando $\mathcal{U}$ suficientemente pequeño (alrededor de un punto dado) siempre existe tal I y por tanto un flujo local (véanse Th.7.3 y Th.7.5 en [Wal04, §1.7]). Además $\Phi_t(p)$ es C^∞ como función de p y t.

Lema 2.1.1 *Sea I como en la definición de flujo local. Si $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I$ entonces*

$$\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}.$$

Demostración: Sea t entre 0 y t_1, entonces también $t, t + t_2 \in I$. Por definición

$$\Phi_t \circ \Phi_{t_2}(p) = c_{\Phi_{t_2}(p)}(t) = c_{c_p(t_2)}(t) \qquad \text{y} \qquad \Phi_{t+t_2}(p) = c_p(t + t_2).$$

Ambos resultados son curvas integrales que parten (para $t = 0$) del punto $c_p(t_2)$, por tanto deben coincidir y tomando $t = t_1$ se deduce el resultado. $\square$

Proposición 2.1.2 *Si X es un campo de vectores completo en M entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ su flujo $\Phi_t : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo y $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo abeliano con la composición (se dice que es un* grupo uniparamétrico de difeomorfismos*).*

Demostración: Por el Lema 2.1.1, $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_0 = \mathrm{Id}$ y por tanto Φ_t es un difeomorfismo con función inversa Φ_{-t}. Por otro lado, la relación $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ permite deducir las propiedades de grupo abeliano a partir de las de $(\mathbb{R}, +)$. $\square$

Un grupo uniparamétrico de difeomorfismos hereda de $\mathbb{R}$ una estructura de variedad y así es un tipo especial de *grupo de Lie*, un grupo que tiene estructura de variedad de tal modo que la operación de grupo es compatible con la estructura diferenciable. Este concepto fue introducido por S. Lie y su idea clave fue estudiar estos "grupos continuos", que en principio pueden ser muy complicados, a través del espacio tangente en el elemento unidad dotado con una operación producto de vectores con propiedades especiales, lo que se llama un *álgebra de Lie*.

Según hemos visto, en las variedades compactas todos los campos de vectores son completos, sin embargo hay muchos ejemplos no triviales de campos completos en variedades no compactas (por ejemplo, en cualquier grupo de Lie partiendo de un vector en un punto y aplicando todas las trnsformaciones del grupo se consigue siempre un campo de vectores completo). Veamos uno muy sencillo en que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos está relacionado con la adición de velocidades en relatividad especial.

Ejemplo: Consideremos $M = (-1,1)$ con la carta identidad y el campo de vectores $X = (1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}$.

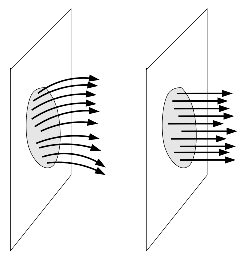
Las curvas integrales $x = x(t)$ vienen determinadas por $x' = 1-x^2$. Integrando $x'/(1-x^2) = 1$ bajo la condición $x(0) = x_0$ se obtiene tras algunos cálculos

$$x(t) = \frac{x_0\big(1+e^{-2t}\big)+1-e^{-2t}}{x_0\big(1-e^{-2t}\big)+1+e^{-2t}}.$$

Si $x_0 = 0$ se tiene $x(t) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de hecho $\operatorname{Im} x = M$. Entonces hay una sola curva integral salvo traslaciones del parámetro y como está definida en $\mathbb{R}$, el campo de vectores es completo. Se sigue

$$\Phi_t(x) = \frac{x\big(1+e^{-2t}\big)+1-e^{-2t}}{x\big(1-e^{-2t}\big)+1+e^{-2t}} = \frac{x+\tanh t}{1+x\tanh t} \qquad \text{donde} \qquad \tanh t = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}.$$

La relación $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ en la que descansa la ley de grupo depende de la ley de adición $\tanh(t+s) = (\tanh t + \tanh s)/(1+\tanh t \tanh s)$.



Intuitivamente parece claro que siempre con un cambio de coordenadas se pueden deformar las curvas integrales en el entorno de un punto para que apunten en una dirección prefijada. Visto de otro modo, siempre cambiando las coordenadas podemos conseguir que localmente un campo de vectores sea constante.

La demostración consiste geométricamente en cortar un haz de curvas integrales con el "plano" (la hipersuperficie) que resulta al congelar todas las variables menos una y añadir como primera variable el propio parámetro de las curvas integrales.

Lema 2.1.3 *Dado un punto p y un campo de vectores X con $X(p) \neq 0$, existe una carta $\big(\mathcal{U}(p),\phi\big)$ con la cual $X = \partial_1$.*

Demostración: Haremos la prueba en $\mathbb{R}^n$. El caso de variedades generales es similar componiendo con las funciones coordenadas. Sea $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Con una traslación y una aplicación lineal se puede suponer que p es el origen y que $X(p) = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

Consideremos la función $F(\vec{y}) = \big(f^1(\vec{y}), f^2(\vec{y}), \dots, f^n(\vec{y})\big)$ con $\vec{y} = (y^1,\dots,y^n)$ definida en un entorno de p como la solución de la ecuación diferencial

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f^i}{\partial y^1}(\vec{y}) = X^i\big(F(\vec{y})\big) \\ F(0,y^2,y^3,\dots,y^n) = (0,y^2,y^3,\dots,y^n). \end{cases}$$

A pesar del uso de derivadas parciales, es una ecuación diferencial ordinaria pues sólo se deriva con respecto a y^1. Por la teoría general, $F \in C^\infty$ en un entorno del origen. Nótese que (2.1) no es más que la ecuación de las curvas integrales que parten del punto $(0, y^2, y^3, \dots, y^n)$. En términos del flujo, $F(\vec{y}) = \Phi_{y_1}(0, y^2, y^3, \dots, y^n)$.

Por la primera ecuación de (2.1) y nuestra hipótesis, $\frac{\partial f^i}{\partial y^1}(p) = \delta^i_1$, mientras que la segunda ecuación asegura $\frac{\partial f^i}{\partial y^j} = \delta^i_j$ para $j \geq 2$. Entonces $DF(p)$ es la matriz identidad y el teorema de la función inversa asegura que F define un cambio de coordenadas. Utilicemos el sistema de coordenadas $(y^1, \dots, y^n)$ con $x^i = f^i(\vec{y})$, es decir, $\vec{y} = F^{-1}(\vec{x})$. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = \frac{\partial x^i}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i\big(F(\vec{y})\big)\frac{\partial}{\partial x^i} = X$$

y por tanto en este nuevo sistema de coordenadas $X = \partial_1$. □

2.2. El corchete de Lie y la derivada de Lie

Recordemos que según la definición abstracta moderna, los vectores en variedades son operadores que actúan sobre funciones como una suerte de derivadas. Entonces tiene sentido considerar la composición XY de dos campos de vectores X e Y, aunque el resultado no sea un campo de vectores. El análogo de la diferencia entre las derivadas parciales cruzadas es el *conmutador* de los operadores y éste resulta ser un objeto importante, que en nuestro contexto (y en el de las álgebras de Lie) recibe un nombre especial.

Definición: Dado un par de campos de vectores X e Y se define su *corchete de Lie* $[X, Y]$ como el operador que actúa sobre $f \in C^\infty$ como

$$[X, Y](f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big).$$

Ejemplo: Para los campos $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= \big(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\big)\big(\frac{\partial f}{\partial y} + 2x\frac{\partial f}{\partial z}\big) - \big(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}\big)\big(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z}\big) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial z} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&\quad -\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\big) = \frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Entonces $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$.

No es difícil ver que la cancelación de las derivadas segundas no es casual. Ocurre en todos los ejemplos y entonces el resultado es de nuevo un campo de vectores. Aunque esto no sea muy profundo, lo enunciamos para resaltar su importancia. Además la expresión obtenida es más conveniente para cálculos explícitos que la definición directa.

Proposición 2.2.1 *Dados dos campos de vectores $X = X^i\partial_i$ e $Y = Y^i\partial_i$, su corchete de Lie es también un campo de vectores que actúa como*

$$[X,Y](f) = \big(X(Y^j)\partial_j - Y(X^j)\partial_j\big)(f)$$

Demostración: Lo más rápido es escribir el ejemplo anterior en general. Llamando $x^1,\dots,x^n$ a las funciones coordenadas:

$$[X,Y](f) = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) - Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(X^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big),$$

y derivando los productos

$$[X,Y](f) = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^iX^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}.$$

Por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, se obtiene la fórmula del enunciado. Esto prueba que $[X,Y]$ es un campo de vectores, pues es combinación lineal de ∂_i. $\Box$

El corchete de Lie se comporta bien con respecto a las aplicaciones lineales inducidas en el espacio tangente por funciones entre variedades.

Proposición 2.2.2 *Sean M y N variedades y $f: M \longrightarrow N$. Para cada par de campos de vectores X e Y en M, se tiene*

$$[df X, df Y]\big|_{f(p)} = df\big([X,Y]\big|_p\big) \qquad \text{para todo} \quad p \in M.$$

Demostración: Por la definición de la aplicación tangente, si $g: N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(df X)(g)\circ f(p) = (df X)\big|_{f(p)}(g) = df\big(X\big|_p\big)(g) = X\big|_p(g\circ f).$$

Aplicando esta relación repetidas veces

$$\begin{aligned}
[df X, df Y]\big|_{f(p)}(g) &= (df X)\big|_{f(p)}\big((df Y)(g)\big) - (df Y)\big|_{f(p)}\big((df X)(g)\big) \\
&= X\big|_p\big((df Y)(g)\circ f\big) - Y\big|_p\big((df X)(g)\circ f\big) \\
&= X\big|_p\big(Y(g\circ f)\big) - Y\big|_p\big(X(g\circ f)\big)
\end{aligned}$$

y esto es $[X,Y]\big|_p(g\circ f)$ o equivalentemente $df\big([X,Y]\big|_p\big)$ aplicado a g. $\Box$

Definición: Dado un par de campos de vectores X e Y se define la *derivada de Lie* de Y a lo largo de X en un punto p como $F'(0)$ donde $F(t) = d\Phi_{-t}\big(Y\big|_{\Phi_t(p)}\big)$ y Φ_t es el flujo local de X. Normalmente se suele denotar mediante L_XY.

Aquí $F'(0)$ se entiende naturalmente como el límite del cociente incremental.

Lo que mide la derivada de Lie es la variación de Y al moverse por una curva integral de X porque $F(0) = Y\big|_p$ y $F(\epsilon)$ es el resultado de "trasladar" el vector $Y\big|_{\Phi_\epsilon(p)}$. Según V.I. Arnold la derivada de Lie es la "derivada del pescador" porque es la derivada (velocidad) que mediría un pescador en una barca siguiendo el flujo del río.

Proposición 2.2.3 *Sean X e Y campos de vectores en una variedad y sea Φ_t el flujo local de X en un entorno de un punto p, entonces $L_X Y = [X, Y]$.*

Demostración: Supongamos $X(p) \neq 0$. Según el Lema 2.1.3 podemos suponer que trabajamos en una carta $\big(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \ldots, x^n)\big)$ tal que $X = \partial/\partial x_1$, por tanto el flujo, en coordenadas locales, aplica $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ en $(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)$ y su matriz jacobiana es la identidad. Así pues, $Y = Y^i \partial_i$ implica, con la notación de la definición anterior, $F(t) = Y^i(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)\partial_i$. Por consiguiente $F'(0) = \partial_1 Y^i \partial_i$ que coincide con $[X, Y]$.

Si $X(p) = 0$ pero X no es idénticamente nulo en un entorno de p, entonces un argumento de continuidad sobre $[X, Y]\big|_p$ y $F'(0)$ prueba el resultado. Por otra parte, si X es nulo en todo un entorno de p, el resultado es trivial (las curvas integrales son constantes). $\Box$

El corchete de Lie cuantifica de alguna forma la conmutatividad de los flujos locales. A este respecto, recuérdese la relación mencionada al comienzo del capítulo, entre la coincidencia de las parciales cruzadas y la independencia del camino.

Proposición 2.2.4 *Sean Φ_t y Ψ_s flujos locales de los campos vectoriales X e Y, respectivamente, en el entorno de un punto. Se cumple $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ si y sólo si $[X, Y] = 0$.*

Demostración: Sabemos que $[X, Y] = 0$ significa que la función F de la definición anterior es constante en t y como Φ_0 es la identidad, $[X, Y] = 0$ equivale a $Y\big|_p = d\Phi_{-t}\big(Y\big|_{\Phi_t(p)}\big)$ (con p variable). El flujo de Y es ψ_s, por tanto basta comprobar que $\Phi_{-t} \circ \Psi_s \circ \Phi_t$ es el flujo de $d\Phi_{-t}\big(Y\big|_{\Phi_t(\cdot)}\big)$ para terminar la prueba, ya que el Lema 2.1.1 asegura que Φ_{-t} es la inversa de Φ_t.

Consideremos una carta $\big(\mathcal{U}, \phi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)\big)$ y digamos que en ella la matriz de $d\Phi_{-t}$ (que es la jacobiana de $\phi \circ \Phi_{-t} \circ \phi^{-1}$) tiene elementos a^i_j y que las componentes de Y son Y_i. Por la definición de flujo, $\frac{d}{ds}\big(x^i \circ \Psi_s\big) = Y^i \circ \Psi_s$. Sea $c_p(s) = \Phi_{-t} \circ \Psi_s \circ \Phi_t(p)$, entonces por la regla de la cadena

$$\frac{d}{ds}\big(x^i \circ c_p(s)\big) = \frac{d}{ds}\big((x^i \circ \Phi_{-t} \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \Psi_s \circ \Phi_t(p)\big) = a^i_j Y^j \circ \Psi_s \circ \Phi_t(p) = a^i_j Y^j \circ \Phi_t\big(c_p(s)\big).$$

En definitiva, hemos probado que $(x^i \circ c_p)'(s)$ coincide con la i-ésima componente de $d\Phi_{-t}\big(Y\big|_{\Phi_t(c_p(s))}\big)$ o equivalentemente que $\Phi_{-t} \circ \Psi_s \circ \Phi_t$ es el flujo de $d\Phi_{-t}\big(Y\big|_{\Phi_t(\cdot)}\big)$. $\Box$

Ejemplo: Ya sabíamos que los campos $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathbb{R}^3$ tenían corchete de Lie no nulo. Comprobemos que sus flujos no conmutan.

Las curvas integrales de X responden a las ecuaciones diferenciales $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = y$ cuya solución es $x(t) = t + x_0$, $y(t) = y_0$, $z(t) = y_0 t + z_0$. Así pues el flujo local es $\Phi_t(x, y, z) = (t + x, y, yt + z)$. De la misma forma las curvas integrales de Y vienen dadas por $x(s) = x_0$, $y(s) = s + y_0$, $z(s) = 2x_0 s + z_0$, dando lugar al flujo $\Psi_s(x, y, z) = (x, s + y, 2xs + z)$. De aquí

$$\begin{cases} \Phi_t \circ \Psi_s(x, y, z) = (t + x, s + y, st + yt + 2xs + z) \\ \Psi_s \circ \Phi_t(x, y, z) = (t + x, s + y, 2st + yt + 2xs + z) \end{cases}$$

que tienen terceras coordenadas distintas. Geométricamente, para $t_0 \neq 0$, $\Phi_{t_0}(\vec{0})$ y $\Psi_{t_0}(\vec{0})$ recorren t_0 unidades en los ejes x e y, y $\Psi_t\big(\Phi_{t_0}(\vec{0})\big)$ y $\Phi_t\big(\Psi_{t_0}(\vec{0})\big)$ son dos rectas que se cruzan cuando t varía. Esta imposibilidad de cerrar el cuadrilátero implica la no conmutatividad.

2.3. Condiciones de integrabilidad

Retomando los comentarios al comienzo del capítulo, si en cada punto nos dicen en qué dirección dirigirnos, el camino quedará determinado. Asignar un módulo a esa dirección sólo cambiará la velocidad a la que recorremos dicho camino. En términos matemáticos, mutliplicar por una constante no nula en cada punto (por una función) los vectores de un campo tiene el efecto de reparametrizar las curvas integrales.

Siguiendo la filosofía de considerar objetos geométricos sin referencia a coordenadas o parametrizaciones particulares, para definir subvariedades de una variedad M que sean tangentes a campos de vectores, debemos fijarnos en los subespacios vectoriales de $T_p(M)$ que generan, más que en los propios campos en sí. Esto lleva al concepto de *distribución*, un nombre, por cierto, no muy afortunado.

Definición: Sea M una variedad n-dimensional. Una *distribución* Δ de dimensión k es una forma de asignar a cada $p \in M$ un subespacio k dimensional $\Delta_p \subset T_p(M)$, de forma que en un entorno $\mathcal{U}(p)$ venga generado por campos de vectores $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$.

La definición parece repetitiva. Insistir sobre los campos de vectores (por supuesto C^∞) es sólo una forma de impedir que la asignación $p \longmapsto \Delta_p$ sea en cierto modo discontinua o poco regular. Se dice que los campos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, como en la definición anterior, conforman una *base local* de Δ.

No es posible en general tomar una misma base local válida para todo $p \in M$. Por ejemplo, el *teorema de la bola de pelo* [Hir76] [Mun75] dice, con este lenguaje, que no se puede elegir $\mathcal{U}(p) = S^2$ para ninguna distribución de dimensión 1 en S^2.

Dada una distribución Δ el análogo de las curvas integrales será ahora una subvariedad cuyo espacio tangente en cada punto p coincida con Δ_p. Éste es un buen lugar para recordar qué es una *subvariedad*. Esencialmente es una variedad N dentro de otra M. En términos matemáticos, pedimos que la inclusión $i : N \longrightarrow M$ sea una inmersión, es decir, que las estructuras diferenciales sean coherentes. Se podría generalizar el concepto cambiando i por cualquier inmersión inyectiva.

Definición: Sea N una subvariedad de M con $i : N \longrightarrow M$ la inclusión. Se dice que N es una *subvariedad integral* de una distribución Δ en M si $di\big(T_p(N)\big) = \Delta_p$ para todo $p \in N$.

Nota: Algunos autores [Boo75] sólo piden $di\big(T_p(N)\big) \subset \Delta_p$ pero, al menos en nuestro contexto, esta generalidad no tiene recompensa (véase [War83, §1.58]).

El ejemplo del principio del capítulo y las explicaciones que le siguen sugieren que hay distribuciones que tiene subvariedades integrales y otras que no. Las del primer tipo se recogen en la siguiente definición de manera indirecta.

Definición: Se dice que Δ una distribución de dimensión k es *completamente integrable* si para cada punto p existe una carta $\big(\mathcal{U}(p), \phi\big)$ con la cual $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k\}$ es una base local de Δ.

Lema 2.3.1 *Una distribución Δ en M es completamente integrable si y sólo si para cada $p \in M$ hay alguna subvariedad integral de Δ con $p \in N$.*

Demostración: Con la notación de la definición anterior, si Δ es completamente integrable y $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, consideremos

$$N = \big\{q \in M \ : \ x^{k+1}(q) = x^{k+1}(p), \dots, x^n(q) = x^n(p)\big\}. \tag{2.2}$$

Entonces N es una subvariedad integral de Δ, pues $di(\partial_i) = \partial_i$.

Por otro lado, si N es una variedad integral de Δ entonces siempre existe un cambio de coordenadas que permite escribirla en la forma (2.2) [O'N83, Ch.1.28] (esto es el teorema de la inmersión) y por tanto para todo $p \in N$ se tiene que $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_k\}$ es una base local de Δ. □

El teorema de Frobenius establece bajo qué condiciones una distribución es completamente integrable. En al demostración se atisbará que tras un cambio de coordenadas son similares a la exigida en la Proposición 2.2.4 Tras la relación entre flujos y corchetes, la siguiente definición debería traer a la memoria las parciales cruzadas que aparecieron en la discusión inicial.

Definición: Se dice que Δ una distribución de dimensión k es *involutiva* si para cada base local $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ existen funciones c_{ij}^k tales que

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^r X_r \qquad \text{para } 1 \le i, j \le k.$$

Nótese que se ha empleado el convenio de sumación y se debe sobreentender un sumatorio en $1 \le r \le k$. En cada entorno, basta comprobar la condición anterior para una base local, pues gracias a la Porposición 2.2.2, por cambios de coordenadas los vectores y los corchetes de Lie se transforman linealmente de la misma forma y por tanto la relación lineal de la definición anterior se transforma en otra similar.

Teorema 2.3.2 (teorema de Frobenius) *Una distribución es involutiva si y sólo si es completamente integrable.*

Para probar este resultado seguimos aquí esencialmente los pasos de [Lun92]. Separamos primero un caso fácil.

Proposición 2.3.3 *Sea Δ una distribución que en cierta carta admite una base del tipo $\{\partial_1, \partial_2, \dots \partial_k, X\}$. Si Δ es involutiva entonces es completamente integrable*

Demostración: Escribamos $X = a^1\partial_1 + a^2\partial_2 + \cdots + a^n\partial_n$. Se puede suponer $a^1 = a^2 = \cdots = a^k = 0$ porque en otro caso basta restar a X el vector $a^1\partial_1 + a^2\partial_2 + \cdots + a^k\partial_k$ que es combinación lineal de los primeros elementos de la base. En un entorno de un punto alguna de las otras coordenadas de X es no nula, quizá intercambiando las variables, digamos que es a^{k+1}. Dividiendo entre esta coordenada se puede suponer $X = \partial_{k+1} + a^{k+2}\partial_{k+2} + \cdots + a^n\partial_n$.

Por hipótesis, $[\partial_i, X] \in \Delta$, $1 \le i \le k$, y la particular forma de X implica que $[\partial_i, X] = 0$ y que las funciones $a^{k+2}, \dots, a^n$ no dependen de las k primeras funciones coordenadas.

Por el Lema 2.1.3, existe un cambio de coordenadas tal que $X = \partial_{k+1}$, de hecho este cambio se puede elegir dejando las primeras k variables invariantes (pues no participan en X, nótese que en (2.1) si $X^i = 0$ y el resto de los X^j no dependen de i-ésima coordenada, entonces $f^i(\vec{y}) = y^i$). Con ello hemos conseguido la base $\{\partial_1, \partial_2, \dots \partial_k, \partial_{k+1}\}$ buscada. □

El plan de la demostración del teorema de Frobenius es emplear inducción y el paso de k a $k+1$ sólo requerirá utilizar la versión fácil dada por la Proposición 2.3.3.

Demostración del teorema de Frobenius: Claramente, si una distribución es completamente integrable entonces es involutiva, porque $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Nos concentramos entonces en la implicación directa.

Como hemos sugerido, procedemos por inducción en la dimensión k de la distribución Δ. Para $k = 1$ basta aplicar el Lema 2.1.3.

Sea Δ de dimensión $k+1$, con una base dada por los vectores $X_j = a_i^j\partial_j$ con $1 \le i \le k+1$. Al ser linealmente independientes siempre podemos suponer, quizá intercambiando los nombres de las variables, que la matriz $A = \big(a_i^j\big)_{1\le i,j\le k+1}$ es no singular. Sean b_i^j los elementos de A^{-1}, entonces $Y_i = b_i^j X_j$, $1 \le i \le k+1$, constituyen una base de Δ. Además $Y_i = \partial_i + \sum_{j=k+2}^n c_i^j\partial_j$ para ciertos c_i^j, donde n es la dimensión de la variedad.

La condición $[Y_i, Y_j] \in \Delta$ implica $[Y_i, Y_j] = 0$, porque en $[Y_i, Y_j]$ no aparece Δ_i con $1 \leq i \leq k+1$.

La distribución generada por $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ es por tanto involutiva y la hipótesis de inducción permite encontrar un cambio de coordenadas de forma que esté generada por $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_k\}$. La prueba se termina aplicando la Proposition 2.3.3 a la base de Δ dada por $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_k, Y_{k+1}\}$. $\square$

Ejemplo: Volviendo una vez más al ejemplo inicial, sabemos que para $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$ se cumple $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$. Claramente $[X, Y]$ no está en el subespacio generado por X e Y, por consiguiente el teorema de Frobenius asegura que no existe ninguna subvariedad de $\mathbb{R}^3$ que tenga a X e Y como vectores tangentes en cada punto.