Fecha límite de entrega: 26 de enero

Ejercicios

1) Sea $T(X,Y,Z) = \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X$ donde X, Y y Z son campos de vectores en una variedad semiriemanniana M. Comprobar que $fT(X,Y,Z) = T(fX,Y,Z) = T(X,fY,Z) = T(X,Y,fZ)$ para cualquier $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) Sea $M = \mathbb{R}^+ \times (0,1)$ con la métrica $ds^2 = dx^2 + (e^x - e^{-x})^2 dy^2$. Calcular la curvatura escalar de esta variedad riemanniana.

3) Probar que si en $\mathbb{R}^2$ tenemos una métrica riemanniana de la forma $A(x)dx^2 + B(y)dy^2$ entonces el tensor de Ricci es nulo.

4) Consideremos el semiplano de Poincaré $\mathbb{H} = \{x + iy \ : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+\}$ dotado de la métrica $G = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Recuérdese que la acción de $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dada por $g(z) = (az+b)/(cz+d)$, define una isometría. En particular si d es la función distancia en $\mathbb{H}$ se tiene $d(z,w) = d\big(g(z), g(w)\big)$.

a) Probar que la función $F(z,w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}$ cumple $F(z,w) = F\big(g(z), g(w)\big)$.

b) Probar que si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) = 0$ entonces la distancia entre z y w es $\operatorname{arc\,cosh} F(z,w)$.

c) Deducir que $d(z,w) = \operatorname{arc\,cosh} F(z,w)$ para todo $z, w \in \mathbb{H}$.

Notas e indicaciones

1) No se puede apelar a que el tensor de curvatura es en realidad un tensor de tipo $(1,3)$, porque en el curso hemos deducido esto último dando por supuesto este ejercicio. Lo que se espera es una demostración usando las propiedades de las conexiones.

2) Una manera de hacerlo, no necesariamente la más rápida, es calcular la curvatura de Gauss y emplear su relación con la curvatura escalar.

3) Hay una prueba brevísima usando la tensorialidad bajo un cambio de coordenadas adecuado.

4) Aquí $\operatorname{arc\,cosh} x$ es la función inversa de $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Para el segundo apartado, nótese que la vertical $x = 0$, convenientemente parametrizada es una geodésica. La deducción del tercer apartado pasa por entender por qué podemos llevar siempre el problema a $x = 0$.

Éste es uno de los pocos ejemplos sencillos en que se puede dar una fórmula explícita para la distancia en una variedad riemanniana.