Fecha límite de entrega: 12 de enero

Ejercicios

1) Calcular las componentes de la derivada covariante del campo de vectores $V = x\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}$ cuando la métrica es $dx^2 + x^2dy^2$.

2) El *semiplano de Poincaré* es el semiplano complejo $\mathbb{H} = \{x + iy \ : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+\}$ dotado de la *métrica de Poincaré* $G = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Para cada $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, el grupo de matrices reales 2×2 con determinante 1, se define $g(z) = (az + b)/(cz + d)$.

a) Probar que g es una isometría, es decir, que $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es un difeomorfismo que preserva la métrica en el sentido de que se verifica $G(\vec{v}, \vec{w}) = G\big(dg(\vec{v}), dg(\vec{w})\big)$.

b) Explicar por qué las curvas $c(t) = g\big(ie^{Kt}\big)$ son geodésicas.

3) Probar que con el modelo de gravitación dado por la métrica de Schwarzschild, a lo largo de la trayectoria de una partícula la cantidad $r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$ permanece constante.

4) Leyes físicas básicas implican que en presencia de un monopolo magnético en el origen, el movimiento de una partícula cargada viene descrito por una curva $c(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ que satisface $\ddot{c} = \|c\|^{-3}(c \times \dot{c})$ donde $\times$ indica el producto vectorial. Probar que si la partícula parte de $(1, 0, 1)$ con velocidad $(0, 1/\sqrt{2}, 0)$, entonces $c(t)$ es una geodésica del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Notas e indicaciones

1) Con la notación del curso, lo que se pide es $V^i_{;j}$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

2) En a) los cálculos se reducen drásticamente escribiendo la métrica como $G = \big(\text{Im}(z)\big)^{-2}|dz|^2$ con $z = x + iy$ y estudiando cómo se transforman $\text{Im}(z)$ y dz.

Se dará puntuación extra por decidir razonadamente si todas las geodésicas son de la forma indicada en el segundo apartado.

3) Recuérdese que llamamos la métrica de Schwarzschild a

$$-\big(1 - \frac{r_0}{r}\big)dt^2 + \big(1 - \frac{r_0}{r}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2.$$

4) Se sobreentiende que el cono tiene la métrica usual, es decir, $G(\vec{v}, \vec{w}) = E\big(di(\vec{v}), di(\vec{w})\big)$ donde i es la inclusión y E es la métrica euclídea $dx^2 + dy^2 + dz^2$ en $\mathbb{R}^3$. Con esto <u>no</u> se sugiere que sea una buena elección trabajar con coordenadas cartesianas.

Se dará puntuación extra por explicar qué sucede bajo condiciones iniciales arbitrarias.